

---

Un schéma linéaire vérifiant le principe du maximum pour des opérateurs de diffusion très anisotropes sur des maillages déformés

Christophe Le Potier

CEA Saclay

Le 4 Décembre, Champ sur Marne

---

- 
- Presentation
  - Bibliographie
  - Cas isotrope
  - Cas anisotrope
  - Propriétés du schéma
  - Résultats numériques
  - Conclusion

# Présentation

---

Considérons un domaine polygonal convexe  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  de dimension 2. Nous simplifions le modèle de transport en supprimant la convection et la décroissance radioactive. Il s'écrit :

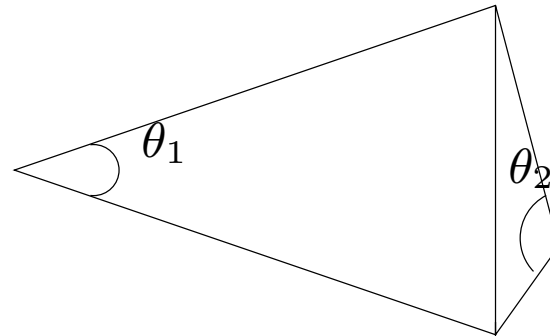
$$\begin{cases} \vec{q} = -\overline{\overline{D}}\vec{\nabla}C \\ \operatorname{div}\vec{q} = S \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec  $C$ , la concentration de radionucléide,  $S$ , un terme source,  $\overline{\overline{D}}$ , une matrice (2,2) symétrique définie positive. D'autre part, des conditions aux limites du type Dirichlet sont imposées sur la frontière du domaine étudié.

# Bibliographie (Schémas linéaires )

---

Cas isotrope: hypothèse géométrique. Par exemple, pour des triangles :



- Condition d'angle :  $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$  pour E.F et les V.F (VF4).
- Condition de Delaunay
- J. Xu, L. Zikatanov, A monotone finite element scheme for convection-diffusion equations, Math. Comp. 66 (228) (1999) 1429-1446

# Bibliographie (Schémas non linéaires)

---

- E. Burman et A. Ern (04) correction non linéaire des éléments finis.
- C.L.P (05) (VFMON) positif.
- K. Lipnikov, M. Shaskhov, D. Svyatskiy, Y. Vassilevski(07)
- I. Kapyrin (07)
- G. Yuan, Z. Sheng, JCP (June 08)
- C.L.P(08), PMMD (FVCA5)

# En 1d

---

Finite Volume Methods: R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin (2000)

- Maillage à pas non constant de  $[0,1]$  :  
 $x_0 = 0 < x_1 < x_{\frac{3}{2}} \dots < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} \dots < x_N = 1$
- $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ ,  $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$
- $c_i = c(x_i)$ ,  $S_i = S(x_i)$
- Schéma volumes finis :  $F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i S_i$
- $F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$

# En 1d

---

- Schéma VF :  $\frac{1}{h_i} \left( -\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) = S_i$
- La solution  $c_i$  converge vers la solution exacte  $c_{exa}$  mais  $\frac{1}{h_i} \left( -\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right)$  n'approche pas en général  $\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}$
- Variante consistante:  $\frac{4}{2h_i + h_{i-1} + h_{i+1}} \left( -\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) = S_i$

# Cas isotrope

---

Considérons un maillage de polygones quelconques de  $\Omega$  constitué de  $N_{ma}$  mailles. Notons  $\mathcal{B} = \{X_i_{1 \leq i \leq N_{ma} + N_f}\}$  l'ensemble constitué des  $N_{ma}$  barycentres de chaque polygone et de  $N_f$  points situés sur la frontière ;  $(x_i, y_i)$  les coordonnées de  $X_i$ .

Soit une fonction  $c(x, y)$  de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ . Le développement en série de Taylor autour du point  $(x_i, y_i)$  s'écrit :

$$c_j = c_i + \Delta x_j \frac{\partial c_i}{\partial x} + \Delta y_j \frac{\partial c_i}{\partial y} + \frac{\Delta x_j^2}{2} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\Delta y_j^2}{2} \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + \Delta x_j \Delta y_j \frac{\partial^2 c_i}{\partial x \partial y} + O(\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}^3) \quad (2)$$

avec  $\Delta x_j = x_j - x_i$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_i$ ,  $c_j = c(x_j, y_j)$



# Cas isotrope

---

Nous cherchons à approcher l'expression  $\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2}$  par  $\sum_{j=1, J} z_j (c_j - c_i)$ ,  $z_{j, j=1, J}$  à déterminer. Système linéaire à résoudre :  $AZ = B$ , avec  $Z = (z_{j_{\{1 \leq j \leq J\}}})$ ,  $J$  étant le nombre de points apparaissant dans le stencil du schéma

$$A = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & .. & \Delta x_J \\ \Delta y_1 & .. & \Delta y_J \\ \frac{\Delta x_1^2}{2} & .. & \frac{\Delta x_J^2}{2} \\ \frac{\Delta y_1^2}{2} & .. & \frac{\Delta y_J^2}{2} \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & .. & \Delta x_J \Delta y_J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Différences finies généralisées : L. Gavete, M.L. Gavete, J.J. Benito (2003)

# Cas isotrope

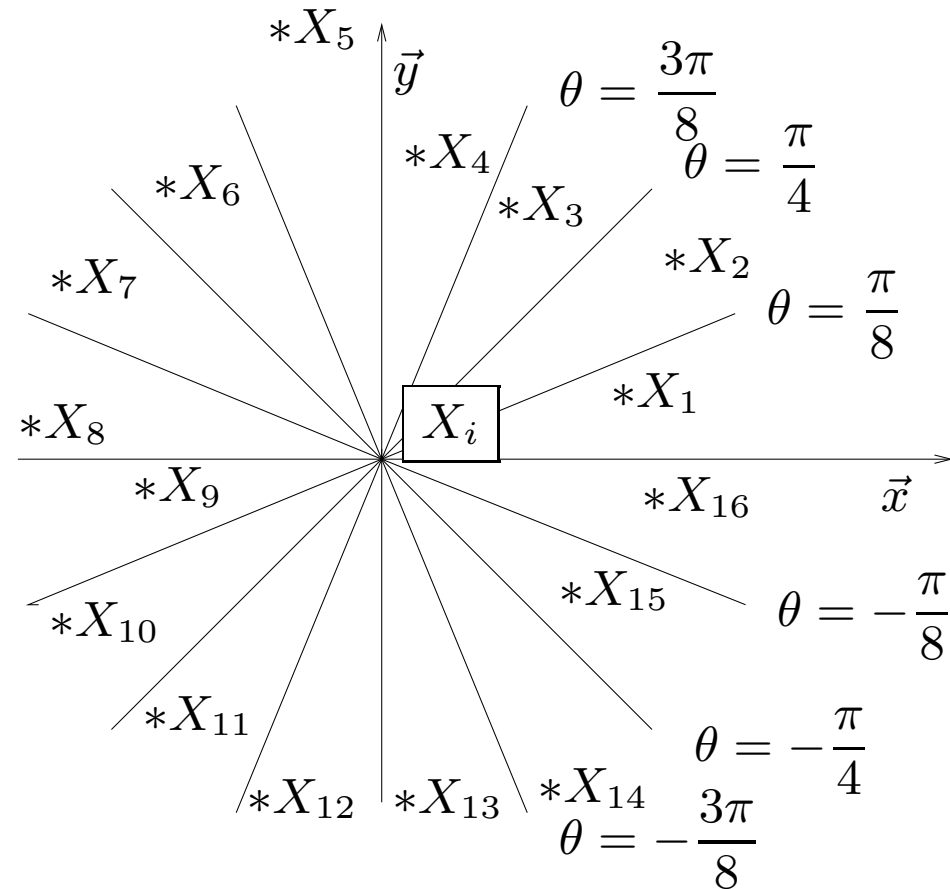
---

Par la suite, nous allons chercher une condition géométrique suffisante pour qu'il existe une solution positive non nulle au système précédent. Nous nous intéressons au système linéaire  $MU = B$ , avec  $U = (u_{j_{\{1 \leq j \leq J\}}})$ .

$$M = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & .. & \Delta x_J \\ \Delta y_1 & .. & \Delta y_J \\ \Delta x_1^2 - \Delta y_1^2 & .. & \Delta x_J^2 - \Delta y_J^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & .. & \Delta x_J \Delta y_J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

# Cas isotrope

---



16 secteurs autour du point  $X_i$

# Cas isotrope

---

**Proposition** *S'il existe un ensemble de points  $X_j \in \mathcal{B}$  satisfaisant la propriété décrite sur la figure précédente, alors il existe une solution  $U$  non nulle qui est positive.*

**Preuve**

Le point  $X_i$  étant à l'intérieur du quadrangle  $(X_1, X_2, X_9, X_{10})$ , il existe 4 coefficients positifs  $(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{9,1}, s_{10,1})$  tels que :

$$s_{1,1}\vec{X}_iX_1 + s_{2,1}\vec{X}_iX_2 + s_{9,1}\vec{X}_iX_9 + s_{10,1}\vec{X}_iX_{10} = \vec{0}.$$

# Cas isotrope

---

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{1,1}\Delta x_1 + s_{2,1}\Delta x_2 + s_{9,1}\Delta x_9 + s_{10,1}\Delta x_{10} = 0 \\ s_{1,1}\Delta y_1 + s_{2,1}\Delta y_2 + s_{9,1}\Delta y_9 + s_{10,1}\Delta y_{10} = 0 \\ s_{1,1}(\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) + s_{2,1}(\Delta x_2^2 - \Delta y_2^2) + \\ \quad s_{9,1}(\Delta x_9^2 - \Delta y_9^2) + s_{10,1}(\Delta x_{10}^2 - \Delta y_{10}^2) \geq 0 \\ s_{1,1}\Delta x_1\Delta y_1 + s_{2,1}\Delta x_2\Delta y_2 + s_{9,1}\Delta x_9\Delta y_9 + s_{10,1}\Delta x_{10}\Delta y_{10} \geq 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

car dans le voisinage de la droite  $\theta = \frac{\pi}{8}$ ,  $\Delta x_j^2 - \Delta y_j^2 \geq 0$  et  $\Delta x_j\Delta y_j \geq 0$ .

On définit alors 3 autres combinaisons linéaires  $s_{j,k}_{\{j=1,16,k=1,4\}}$  qui vérifient les 2 premières équations (autour des droites  $\theta = -\frac{\pi}{8}$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{8}$  et  $\theta = -\frac{3\pi}{8}$ ).

Notons  $Exp3_k = \sum_{j=1,16} s_{j,k}(\Delta x_j^2 - \Delta y_j^2)$  et  $Exp4_k = \sum_{j=1,16} s_{j,k}\Delta x_j\Delta y_j$  où  $k = 1, 4$ .

# Cas isotrope

---

	$Exp3_k$	$Exp4_k$		$Exp3_k$	$Exp4_k$
$k = 1$	$\geq 0$	$\geq 0$	$k = 2$	$\geq 0$	$\leq 0$

	$Exp3_k$	$Exp4_k$		$Exp3_k$	$Exp4_k$
$k = 3$	$\leq 0$	$\geq 0$	$k = 4$	$\leq 0$	$\leq 0$

Il existe deux réels positifs  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  tels que  $\alpha_1 Exp3_1 + \alpha_3 Exp3_3 = 0$  et  $\alpha_1 Exp4_1 + \alpha_3 Exp4_3 \geq 0$ .

De même, il existe  $\alpha_2$  et  $\alpha_4$ , réels positifs tels que  $\alpha_2 Exp3_2 + \alpha_4 Exp3_4 = 0$  et  $\alpha_2 Exp4_2 + \alpha_4 Exp4_4 \leq 0$ .

- les 3 premières équations sont vérifiées.

# Cas isotrope

---

Il existe donc  $\beta_1$  et  $\beta_2$  réels positifs tels que

$$\begin{cases} \beta_1(\alpha_1 \text{Exp}3_1 + \alpha_3 \text{Exp}3_3) + \beta_2(\alpha_2 \text{Exp}3_2 + \alpha_4 \text{Exp}3_4) = 0 \\ \beta_1(\alpha_1 \text{Exp}4_1 + \alpha_3 \text{Exp}4_3) + \beta_2(\alpha_2 \text{Exp}4_2 + \alpha_4 \text{Exp}4_4) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

● Les 4 équations sont vérifiées.

Il existe donc 16 valeurs  $u_{j, \{j=1,16\}}$  positives non toutes nulles vérifiant le système linéaire  $MU = B$ . On pose alors  $Z = (z_{j, \{j=1,16\}})$  qui vérifie  $Z = \nu U$  avec

$$\nu = \frac{2}{\sum_{j=1,16} u_j \Delta x_j^2} = \frac{2}{\sum_{j=1,16} u_j \Delta y_j^2} \text{ et on approche l'expression } \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2}$$

par  $\sum_{j=1,16} z_j (c_j - c_i)$ .

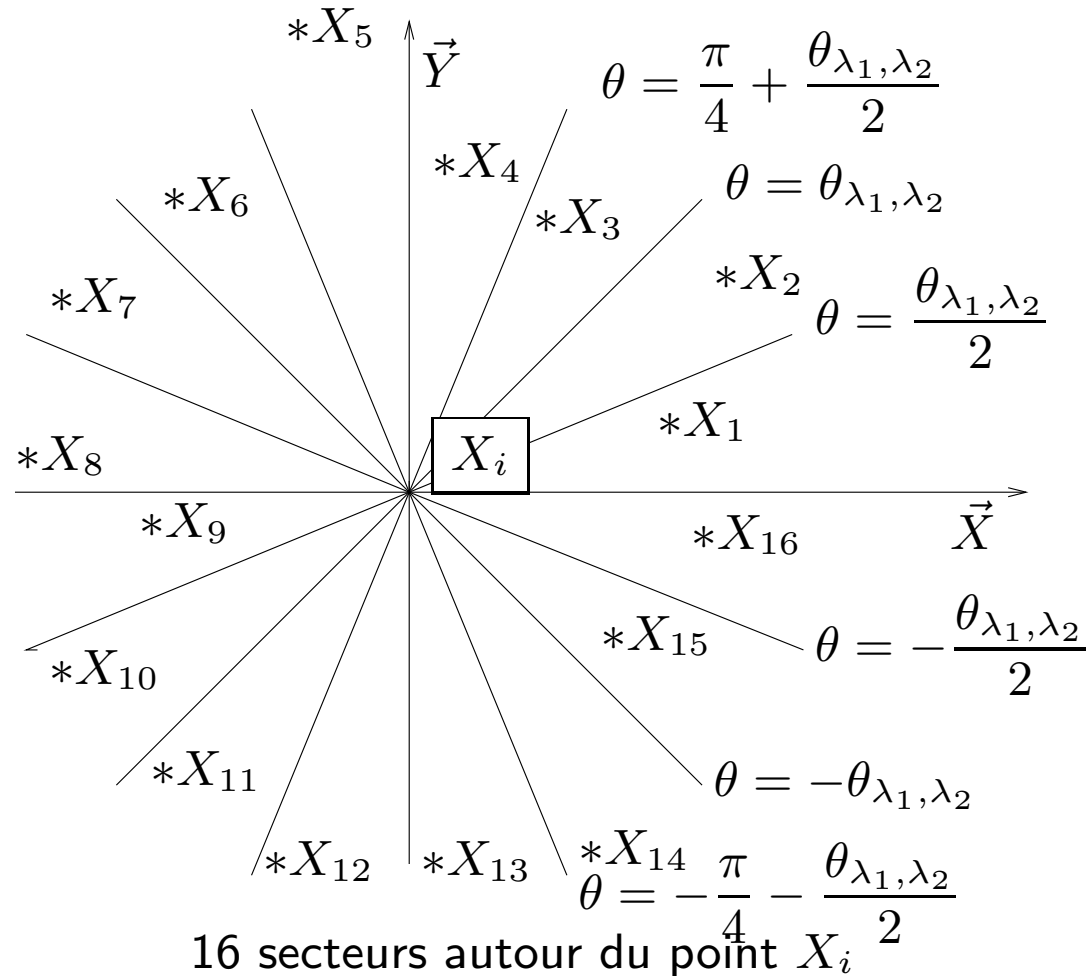
# Cas anisotrope

---

- Le tenseur  $\overline{\overline{D}}$  symétrique est diagonalisable.
- $(\lambda_1, \lambda_2)$  les 2 valeurs propres
- $\theta_{\lambda_1, \lambda_2} = \arctan\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)$
- $(X_i, \vec{X}, \vec{Y})$   $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$ , vecteurs propres normés
- 16 secteurs,  $\theta = \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  $\theta = -\frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  
 $\theta = -\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  $\theta = \theta_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $\theta = -\theta_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
- On suppose qu'il existe  $X_j \in \mathcal{B}$  dans chaque secteur. La proposition précédente se généralise.



# Cas anisotrope



# Cas hétérogène

---

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} D_{1,1}(x, y) & D_{2,1}(x, y) \\ D_{2,1}(x, y) & D_{2,2}(x, y) \end{pmatrix}.$$

$D_{1,1}(x, y)$ ,  $D_{2,2}(x, y)$  et  $D_{2,1}(x, y)$  suffisamment régulières.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{1,1}(x, y) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + 2D_{2,1}(x, y) \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + D_{2,2}(x, y) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \\ \frac{\partial D_{1,1}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial D_{2,1}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} + \\ \frac{\partial D_{2,1}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial D_{2,2}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} = -S \end{array} \right. \quad (7)$$

- Problème convectif-diffusif.
- Terme diffusif : les vecteurs propres dépendent de  $x, y$ . idem cas homogène anisotrope.

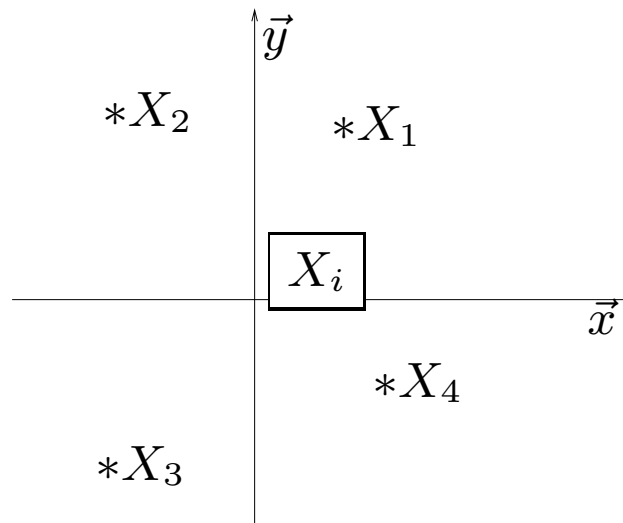
# Cas hétérogène

---

## Terme convectif

(pour  $\frac{\partial C(x, y)}{\partial x}$ ):  $M_x U_x = B_x$ , avec  $U_x = (u_{j_{\{1 \leq j \leq J\}}}^x)$ ,  $J$  étant le nombre de points apparaissant dans le stencil du schéma.

$$M_x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_J \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_J \end{pmatrix}, B_x = \begin{pmatrix} val_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$



4 secteurs autour du point  $X_i$

# Cas hétérogène

---

Proposition : s'il existe un ensemble de points  $X_j \in \mathcal{B}$  satisfaisant la propriété décrite sur la figure précédente, alors il existe  $U_x$ , non nul positif tels que  $M_x U_x = B_x$

- $\frac{\partial C(x, y)}{\partial x}$  approché par  $\sum_{j=1,4} u_{j,x} (c_j - c_i)$
- même propriété pour  $\frac{\partial C(x, y)}{\partial y}$
- Schéma d'ordre 1 type schéma décentré.
- Cas diffusif dominant : ordre 2 pour le terme convectif.

# Propriétés : consistance

---

Soit  $C_h$  les valeurs de  $C$  en  $X_i$ ,  $S_h$  les valeurs de  $S$  en  $X_i$  et  $A_h$  la matrice associée au schéma tel que  $A_h C_h = S_h$ .

- Pour chaque point à l'intérieur du maillage, ajout d'un nombre suffisant de points sur la frontière tel que la propriété décrite sur la figure précédente soit vérifiée.
- $rmax_i$  rayon minimum du cercle tel que les 16 points  $X_j \in \mathcal{B}$  soient à l'intérieur de ce cercle.
- Hypothèse :  $rmax_i$  tend vers 0 lorsque l'on raffine le maillage.

● Comme  $\sum_{j=1,16} z_j \frac{\Delta x_j^2}{2} = \sum_{j=1,16} z_j \frac{\Delta y_j^2}{2} = 1$  avec  $z_j \geq 0$ , alors

$$z_j \leq \frac{2}{\Delta x_j^2} \text{ et } z_j \leq \frac{2}{\Delta y_j^2}.$$

$$\text{Donc } \sum_{j=1,16} z_j (c_j - c_i) = \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + \sum_{j=1,16} z_j O(\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}^3) =$$

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + O(rmax_i) \text{ ce qui prouve la consistance du schéma.}$$

# Propriétés du schéma : consistance

---

## Remarque

- On choisit les  $X_j \in \mathcal{B}$  les plus proches de  $X_i$  appartenant aux 16 secteurs de la figure précédente.
- Pour un maillage de parallélogrammes d'angle aigu  $\nu$  dont les côtés sont de longueur  $r$ , il existe une fonction positive  $g$  et un cercle de rayon  $g(\nu)r$  tels que les points de la figure précédente soient à l'intérieur de ce cercle.
- La fonction  $g$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\nu$  tend vers 0. Le schéma reste consistant mais perd en précision.
- $rm_{\max_i}$  tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage.
- Même propriété, lorsque la régularité ne varie pas dans une convergence en maillage

# Propriétés : principe du maximum

---

- Si la proposition précédente est vérifiée, les coefficients  $z_j$  sont tous positifs.
- La matrice  $A_h$  est irréductible.
- La matrice  $A_h$  est une M-matrice.
- Principe du maximum.

# Propriétés : stabilité et convergence

---

- Pour  $v = -(x^2 + y^2)$ ,  $A_h v = A_0 = 2D_{1,1} + 2D_{2,2}$ ,  $D_{1,1}$  et  $D_{2,2}$  sont les termes de la diagonale de  $\overline{\overline{D}}$ .
- Avec principe du maximum, (Thèse I. Faille : (I.F.P.))  $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq G$  où  $G = \frac{\|v\|_\infty}{A_0}$  est un coefficient strictement positif indépendant de  $rmax = \max_{\{i=1, N_{ma}\}} rmax_i$ .
- Si les hypothèses de la figure précédente sont satisfaites et si pour chaque point  $X_i \in \mathcal{B}$  à l'intérieur du maillage,  $rmax_i$  tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage, le schéma (DFPMD) est convergent en norme infini car il est consistant et stable. Il est au moins d'ordre 1.



# Remarque

---

"On the non existence of monotone linear schema for some linear parabolic equations Comptes Rendus Mathematique, Volume 340, Issue 5, 1 March 2005, Pages 399-404 Christophe Buet, Stéphane Cordier"

- VF9 ou DF9 avec tenseurs anisotropes.
- DFPMD est une solution.
- Solution non linéaire.

# Remarque

---

- Schéma en général non conservatif (sauf cas particulier) qui converge quand même!

# Résultats numériques

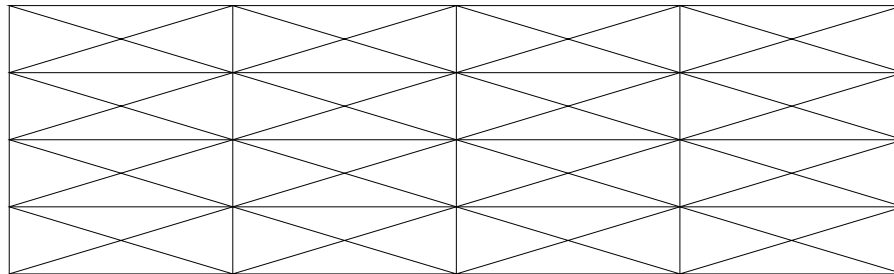
---

## Solution analytique stationnaire

- Exemple de E. Burman et A. Ern
- $\Omega = ]0, 1.0[ \times ]0, 0.3[$
- Tenseur isotrope
- Rectangles découpés en 4 triangles
- Condition de Delaunay non vérifiée
- Conditions aux limites de Dirichlet :  $C = 0$
- $C_{an}(x, y) = \sin(\pi x) \sin((\pi/0.3)y)$
- $S = -\operatorname{div} \overline{\overline{D}} \vec{\nabla} C_{an}$

# Résultats numériques

---



Maillage de 64 triangles.

# Résultats numériques

---

$h,k$	$\frac{1}{4}, \frac{0.3}{4}$	$\frac{1}{8}, \frac{0.3}{8}$	$\frac{1}{16}, \frac{0.3}{16}$	$\frac{1}{32}, \frac{0.3}{32}$
$Nma$	64	256	1024	4096
Erreur $L^2$	$9, 0.10^{-2}$	$2, 8.10^{-2}$	$8, 9.10^{-3}$	$4, 4.10^{-3}$
Ordre		1.66	1.68	1.0

$h,k$	$\frac{1}{64}, \frac{0.3}{64}$	$\frac{1}{128}, \frac{0.3}{128}$	$\frac{1}{256}, \frac{0.3}{256}$
$Nma$	16384	65536	262144
Erreur $L^2$	$1, 8.10^{-3}$	$8, 1.10^{-4}$	$4, 0.10^{-4}$
Ordre	1.32	1.12	1.04

Erreur  $L^2$  et ordre en fonction du pas de discrétisation

# Résultats numériques

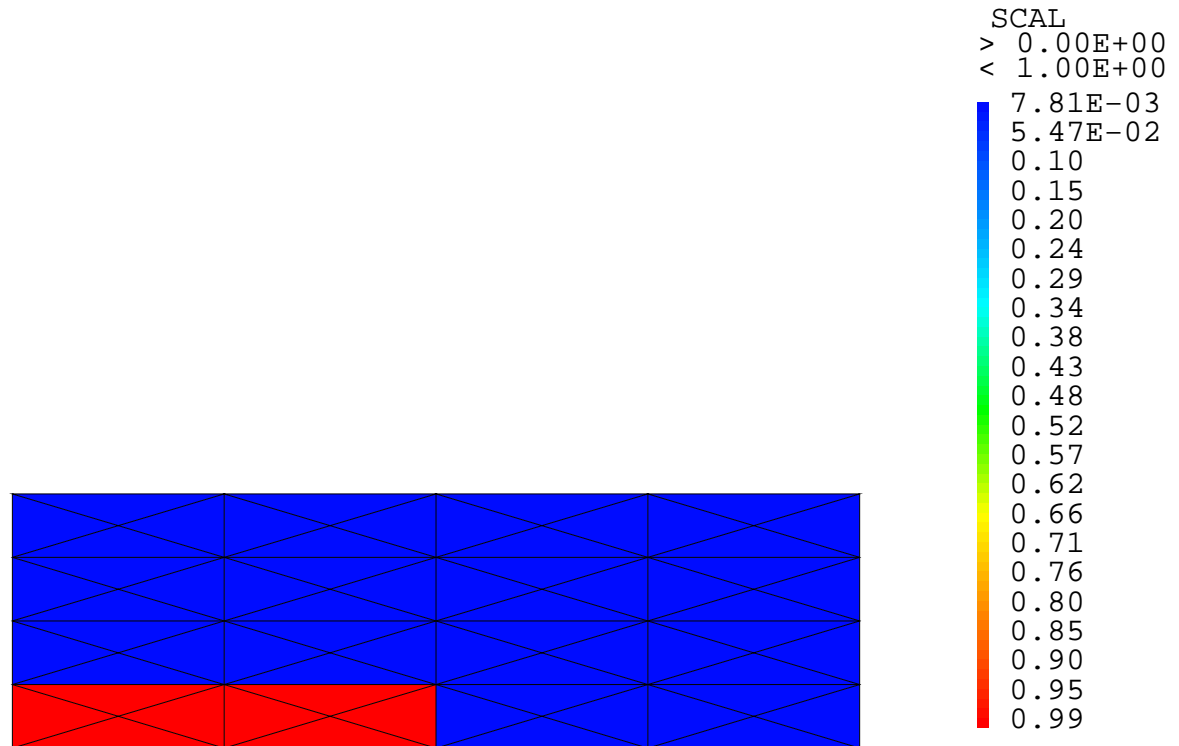
---

## Solution stationnaire avec terme source discontinue

- Exemple de E. Burman et A. Ern
- $\Omega = ]0, 1.0[ \times ]0, 0.3[$
- Cas isotrope
- Rectangles découpés en 4 triangles
- Conditions aux limites de Dirichlet :  $C = 0$ .
- $S = 1$  sur  $]0., 0.5[ \times ]0., 0.075[$  et 0 sinon.
- EFMH/VF(MPFA)/DFPMD (F. Dabbène, G. Bernard-Michel, S. Gounand, C.L.P.)

# Résultats numériques

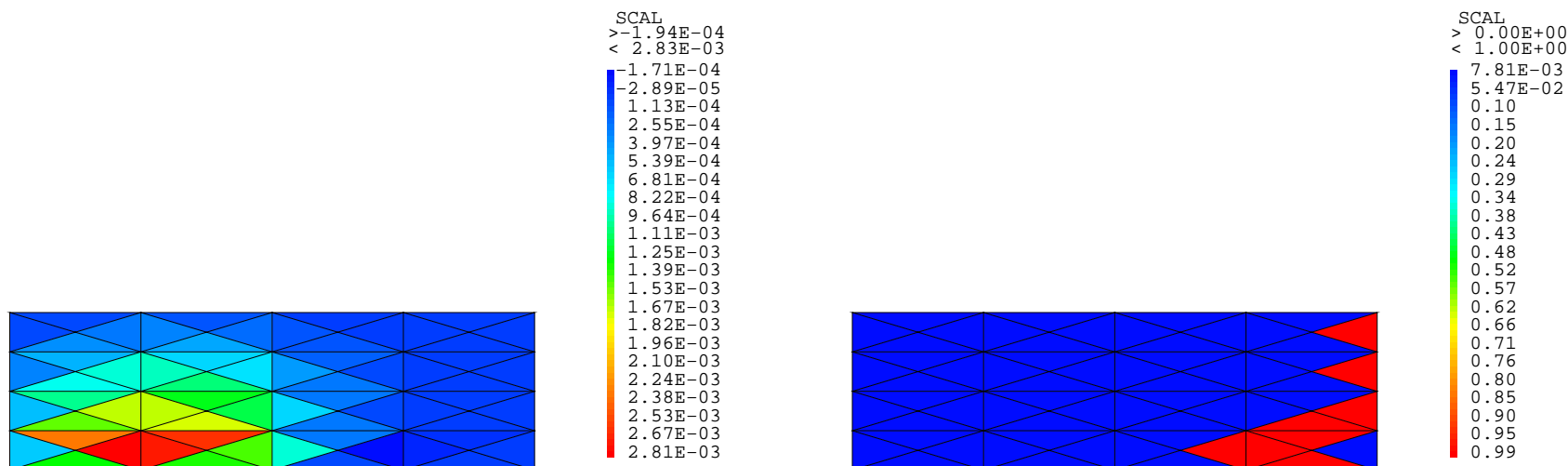
---



Maillage de 64 mailles et source.

# Résultats numériques

---

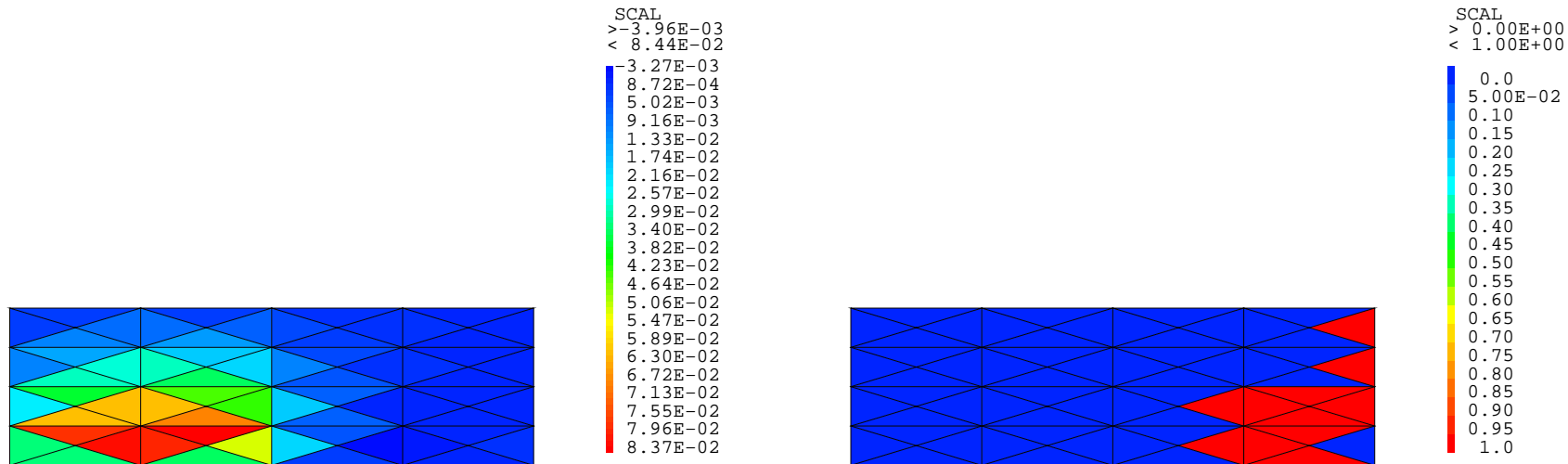


EFMH (concentration et lieu des valeurs négatives) 64 mailles, valeur minimum  $-1.94 \times 10^{-4}$ , 12 % d'oscillations



# Résultats numériques

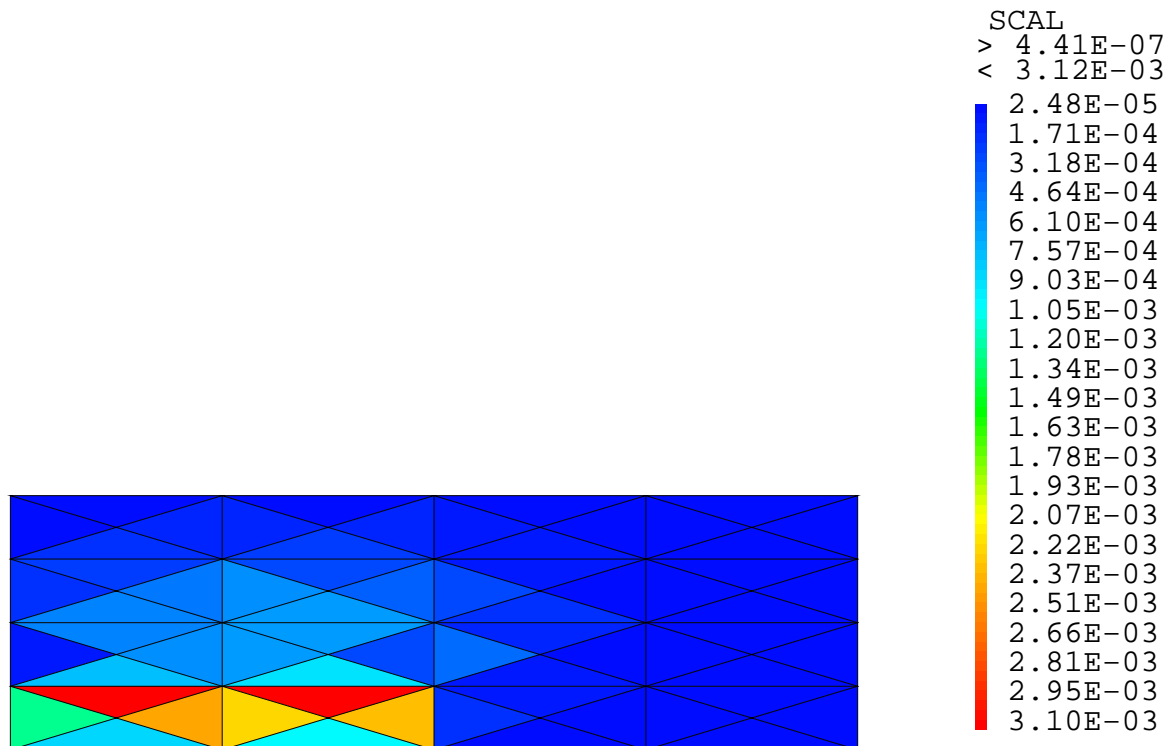
---



VF(MPFA) (concentration et lieu des valeurs négatives) 64 mailles, valeur minimum  $-3.96 \times 10^{-2}$ , 17 % d'oscillations

# Résultats numériques

---



DFPMD (concentration) 64 mailles

---

# Résultats numériques

---

## Solution analytique stationnaire

- Inspiré par le benchmark de FVCA5 (R. Herbin et F. Hubert)
- $\Omega = ]0, 1.0[ \times ]0, 1.0[$
- $\overline{\overline{D}} = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_\theta^{-1}$ ,  $R_\theta$ , rotation d'angle  $\theta = -67.5$  degrés
- Conditions aux limites de Dirichlet :  $C = 0$
- $C_{an}(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$
- $S = -\operatorname{div} \overline{\overline{D}} \vec{\nabla} C_{an}$
- Maillage de carrés.

# Résultats numériques

---

h	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
<i>Nma</i>	16	64	256	1024	4096
Erreur $L^2$	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$
Ordre		0.14	0.85	1.87	1.51

h	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
<i>Nma</i>	16384	65536	262144
Erreur $L^2$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$
Ordre	1.68	1.85	1.92

Erreur  $L^2$  et ordre en fonction du pas de discrétisation

# Résultats numériques

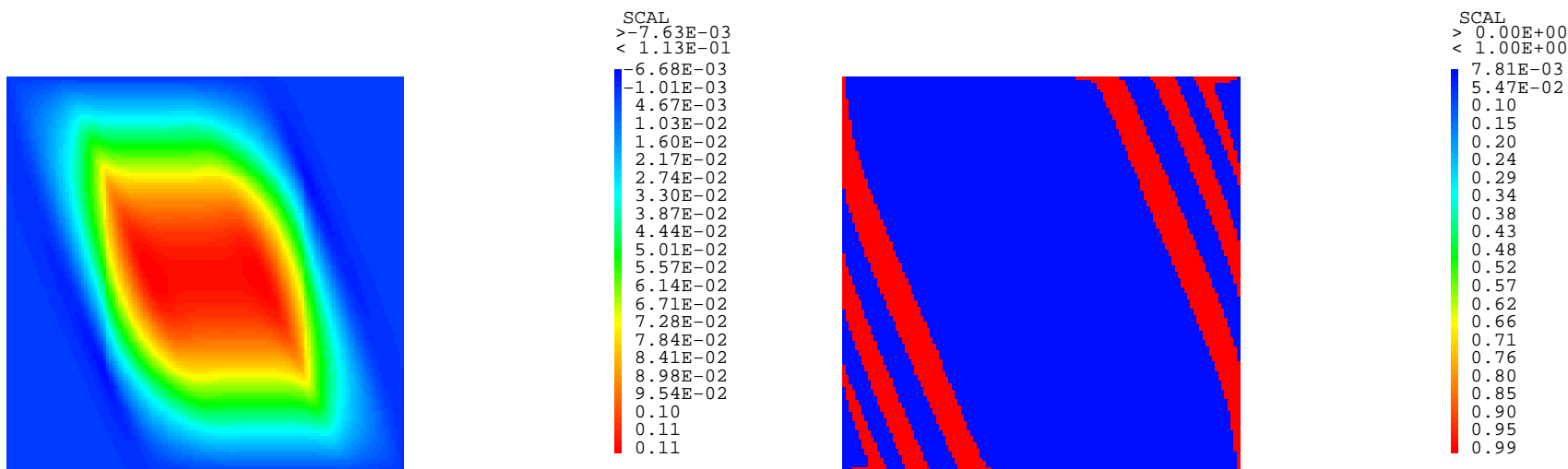
---

## Solution stationnaire avec terme source discontinue

- $\Omega = ]0, 1.0[ \times ]0, 1.0[$
- $\overline{\overline{D}} = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_\theta^{-1}$ ,  $R_\theta$  est la rotation d'angle  $\theta = -67.5$  degrés
- Conditions aux limites de Dirichlet :  $C = 0$ .
- $S = 1$  sur  $]0.25, 0.75[ \times ]0.25, 0.75[$  et 0 sinon.
- Maillage de carrés.

# Résultats numériques

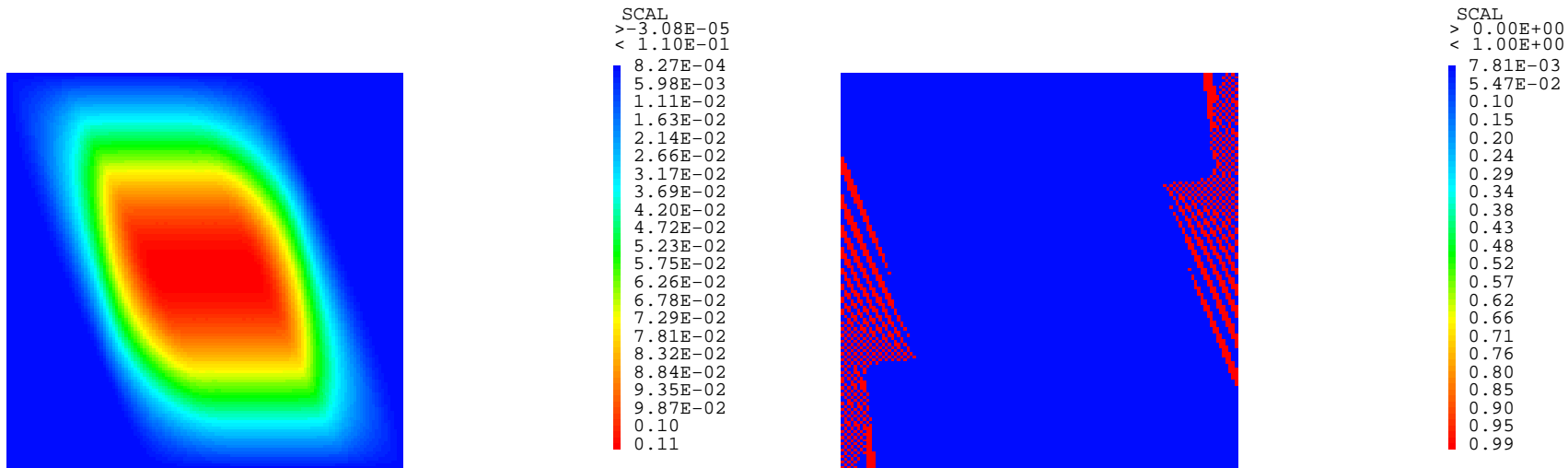
---



EFMH (concentration et lieu des valeurs négatives) 16384 mailles, valeur minimum  $-7.6 \times 10^{-3}$ , 19 % d'oscillations

# Résultats numériques

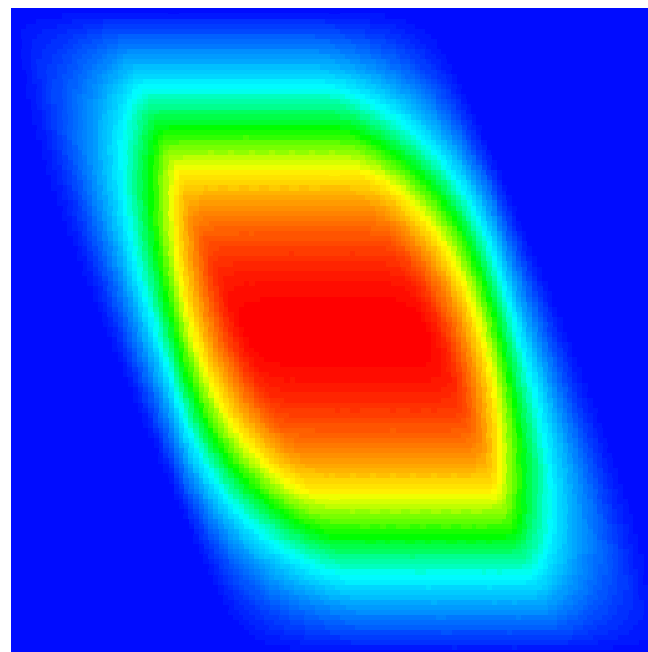
---



VFSYM (concentration et lieu des valeurs négatives) 16384 mailles, valeur minimum  $-3.0 \times 10^{-5}$ , 7 % d'oscillations

# Résultats numériques

---



SCAL  
> 0.00E+00  
< 1.10E-01

8.60E-04
6.02E-03
1.12E-02
1.63E-02
2.15E-02
2.66E-02
3.18E-02
3.70E-02
4.21E-02
4.73E-02
5.24E-02
5.76E-02
6.27E-02
6.79E-02
7.31E-02
7.82E-02
8.34E-02
8.85E-02
9.37E-02
9.89E-02
0.10
0.11

DFPMD (concentration) 16384 mailles



# Conclusion

---

- Convergence numérique vérifiée.
- Système linéaire facile à inverser (Pas de Newton ou de point fixe).
- Prix de la méthode : ordre entre 1 et 2 en espace sur les maillages déformés et les tenseurs très anisotropes.
- Pour des maillages déformés avec tenseurs anisotropes, schéma ordre 1 : linéaire, schéma ordre 2 : non linéaire
- Propriétés proches des schémas approximant un terme convectif. Ordre 1 : schéma TVD, ordre 2 : schéma non linéaire.