
Un schéma linéaire vérifiant le principe du maximum pour des opérateurs de diffusion très anisotropes sur des maillages déformés

Christophe Le Potier

CEA Saclay

Le 4 Décembre, Champ sur Marne

-
- Presentation
 - Bibliographie
 - Cas isotrope
 - Cas anisotrope
 - Propriétés du schéma
 - Résultats numériques
 - Conclusion

Présentation

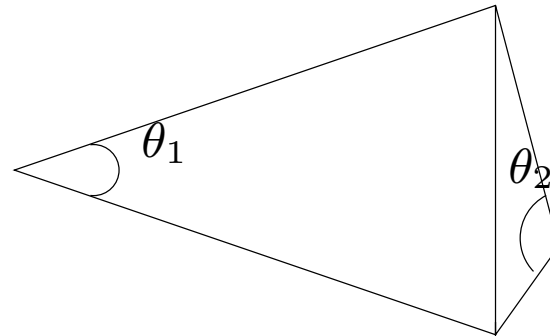
Considérons un domaine polygonal convexe Ω de frontière Γ de dimension 2. Nous simplifions le modèle de transport en supprimant la convection et la décroissance radioactive. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{q} = -\overline{\overline{D}}\vec{\nabla}C \\ \operatorname{div}\vec{q} = S \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec C , la concentration de radionucléide, S , un terme source, $\overline{\overline{D}}$, une matrice (2,2) symétrique définie positive. D'autre part, des conditions aux limites du type Dirichlet sont imposées sur la frontière du domaine étudié.

Bibliographie (Schémas linéaires)

Cas isotrope: hypothèse géométrique. Par exemple, pour des triangles :



- Condition d'angle : $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$ pour E.F et les V.F (VF4).
- Condition de Delaunay
- J. Xu, L. Zikatanov, A monotone finite element scheme for convection-diffusion equations, Math. Comp. 66 (228) (1999) 1429-1446

Bibliographie (Schémas non linéaires)

- E. Burman et A. Ern (04) correction non linéaire des éléments finis.
- C.L.P (05) (VFMON) positif.
- K. Lipnikov, M. Shaskhov, D. Svyatskiy, Y. Vassilevski(07)
- I. Kapyrin (07)
- G. Yuan, Z. Sheng, JCP (June 08)
- C.L.P(08), PMMD (FVCA5)

En 1d

Finite Volume Methods: R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin (2000)

- Maillage à pas non constant de $[0,1]$:
 $x_0 = 0 < x_1 < x_{\frac{3}{2}} \dots < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} \dots < x_N = 1$
- $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$, $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$
- $c_i = c(x_i)$, $S_i = S(x_i)$
- Schéma volumes finis : $F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i S_i$
- $F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$

En 1d

- Schéma VF : $\frac{1}{h_i} \left(-\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) = S_i$
- La solution c_i converge vers la solution exacte c_{exa} mais $\frac{1}{h_i} \left(-\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right)$ n'approche pas en général $\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}$
- Variante consistante: $\frac{4}{2h_i + h_{i-1} + h_{i+1}} \left(-\frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) = S_i$

Cas isotrope

Considérons un maillage de polygones quelconques de Ω constitué de N_{ma} mailles. Notons $\mathcal{B} = \{X_i_{1 \leq i \leq N_{ma} + N_f}\}$ l'ensemble constitué des N_{ma} barycentres de chaque polygone et de N_f points situés sur la frontière ; (x_i, y_i) les coordonnées de X_i .

Soit une fonction $c(x, y)$ de classe C^2 sur Ω . Le développement en série de Taylor autour du point (x_i, y_i) s'écrit :

$$c_j = c_i + \Delta x_j \frac{\partial c_i}{\partial x} + \Delta y_j \frac{\partial c_i}{\partial y} + \frac{\Delta x_j^2}{2} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\Delta y_j^2}{2} \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + \Delta x_j \Delta y_j \frac{\partial^2 c_i}{\partial x \partial y} + O(\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}^3) \quad (2)$$

avec $\Delta x_j = x_j - x_i$, $\Delta y_j = y_j - y_i$, $c_j = c(x_j, y_j)$

Cas isotrope

Nous cherchons à approcher l'expression $\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2}$ par $\sum_{j=1,J} z_j (c_j - c_i)$, $z_{j,j=1,J}$ à déterminer. Système linéaire à résoudre : $AZ = B$, avec $Z = (z_{j_{\{1 \leq j \leq J\}}})$, J étant le nombre de points apparaissant dans le stencil du schéma

$$A = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & .. & \Delta x_J \\ \Delta y_1 & .. & \Delta y_J \\ \frac{\Delta x_1^2}{2} & .. & \frac{\Delta x_J^2}{2} \\ \frac{\Delta y_1^2}{2} & .. & \frac{\Delta y_J^2}{2} \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & .. & \Delta x_J \Delta y_J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

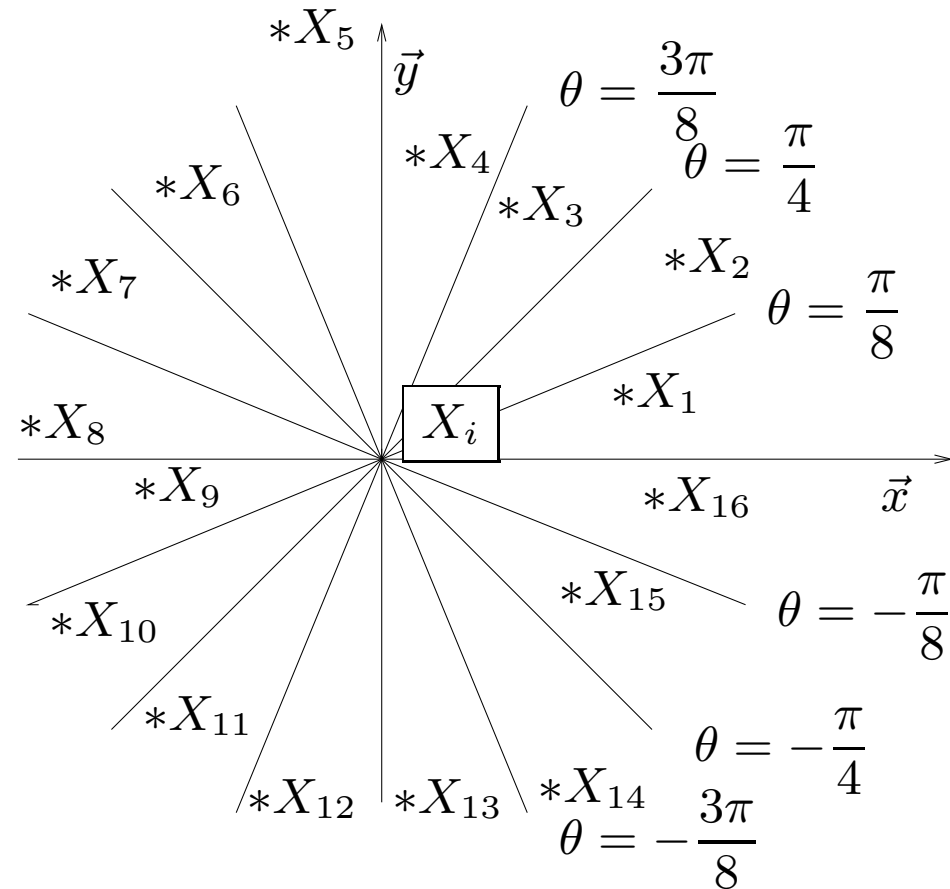
Différences finies généralisées : L. Gavete, M.L. Gavete, J.J. Benito (2003)

Cas isotrope

Par la suite, nous allons chercher une condition géométrique suffisante pour qu'il existe une solution positive non nulle au système précédent. Nous nous intéressons au système linéaire $MU = B$, avec $U = (u_{j_{\{1 \leq j \leq J\}}})$.

$$M = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_J \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_J \\ \Delta x_1^2 - \Delta y_1^2 & \dots & \Delta x_J^2 - \Delta y_J^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_J \Delta y_J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Cas isotrope



16 secteurs autour du point X_i

Cas isotrope

Proposition *S'il existe un ensemble de points $X_j \in \mathcal{B}$ satisfaisant la propriété décrite sur la figure précédente, alors il existe une solution U non nulle qui est positive.*

Preuve

Le point X_i étant à l'intérieur du quadrangle (X_1, X_2, X_9, X_{10}) , il existe 4 coefficients positifs $(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{9,1}, s_{10,1})$ tels que :

$$s_{1,1}\vec{X}_iX_1 + s_{2,1}\vec{X}_iX_2 + s_{9,1}\vec{X}_iX_9 + s_{10,1}\vec{X}_iX_{10} = \vec{0}.$$

Cas isotrope

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{1,1}\Delta x_1 + s_{2,1}\Delta x_2 + s_{9,1}\Delta x_9 + s_{10,1}\Delta x_{10} = 0 \\ s_{1,1}\Delta y_1 + s_{2,1}\Delta y_2 + s_{9,1}\Delta y_9 + s_{10,1}\Delta y_{10} = 0 \\ s_{1,1}(\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) + s_{2,1}(\Delta x_2^2 - \Delta y_2^2) + \\ \quad s_{9,1}(\Delta x_9^2 - \Delta y_9^2) + s_{10,1}(\Delta x_{10}^2 - \Delta y_{10}^2) \geq 0 \\ s_{1,1}\Delta x_1\Delta y_1 + s_{2,1}\Delta x_2\Delta y_2 + s_{9,1}\Delta x_9\Delta y_9 + s_{10,1}\Delta x_{10}\Delta y_{10} \geq 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

car dans le voisinage de la droite $\theta = \frac{\pi}{8}$, $\Delta x_j^2 - \Delta y_j^2 \geq 0$ et $\Delta x_j\Delta y_j \geq 0$.

On définit alors 3 autres combinaisons linéaires $s_{j,k}_{\{j=1,16,k=1,4\}}$ qui vérifient les 2 premières équations (autour des droites $\theta = -\frac{\pi}{8}$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$ et $\theta = -\frac{3\pi}{8}$).

Notons $Exp3_k = \sum_{j=1,16} s_{j,k}(\Delta x_j^2 - \Delta y_j^2)$ et $Exp4_k = \sum_{j=1,16} s_{j,k}\Delta x_j\Delta y_j$ où $k = 1, 4$.

Cas isotrope

	$Exp3_k$	$Exp4_k$		$Exp3_k$	$Exp4_k$
$k = 1$	≥ 0	≥ 0	$k = 2$	≥ 0	≤ 0

	$Exp3_k$	$Exp4_k$		$Exp3_k$	$Exp4_k$
$k = 3$	≤ 0	≥ 0	$k = 4$	≤ 0	≤ 0

Il existe deux réels positifs α_1 et α_3 tels que $\alpha_1 Exp3_1 + \alpha_3 Exp3_3 = 0$ et $\alpha_1 Exp4_1 + \alpha_3 Exp4_3 \geq 0$.

De même, il existe α_2 et α_4 , réels positifs tels que $\alpha_2 Exp3_2 + \alpha_4 Exp3_4 = 0$ et $\alpha_2 Exp4_2 + \alpha_4 Exp4_4 \leq 0$.

- les 3 premières équations sont vérifiées.

Cas isotrope

Il existe donc β_1 et β_2 réels positifs tels que

$$\begin{cases} \beta_1(\alpha_1 \text{Exp}3_1 + \alpha_3 \text{Exp}3_3) + \beta_2(\alpha_2 \text{Exp}3_2 + \alpha_4 \text{Exp}3_4) = 0 \\ \beta_1(\alpha_1 \text{Exp}4_1 + \alpha_3 \text{Exp}4_3) + \beta_2(\alpha_2 \text{Exp}4_2 + \alpha_4 \text{Exp}4_4) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

● Les 4 équations sont vérifiées.

Il existe donc 16 valeurs $u_{j, \{j=1,16\}}$ positives non toutes nulles vérifiant le système linéaire $MU = B$. On pose alors $Z = (z_{j, \{j=1,16\}})$ qui vérifie $Z = \nu U$ avec

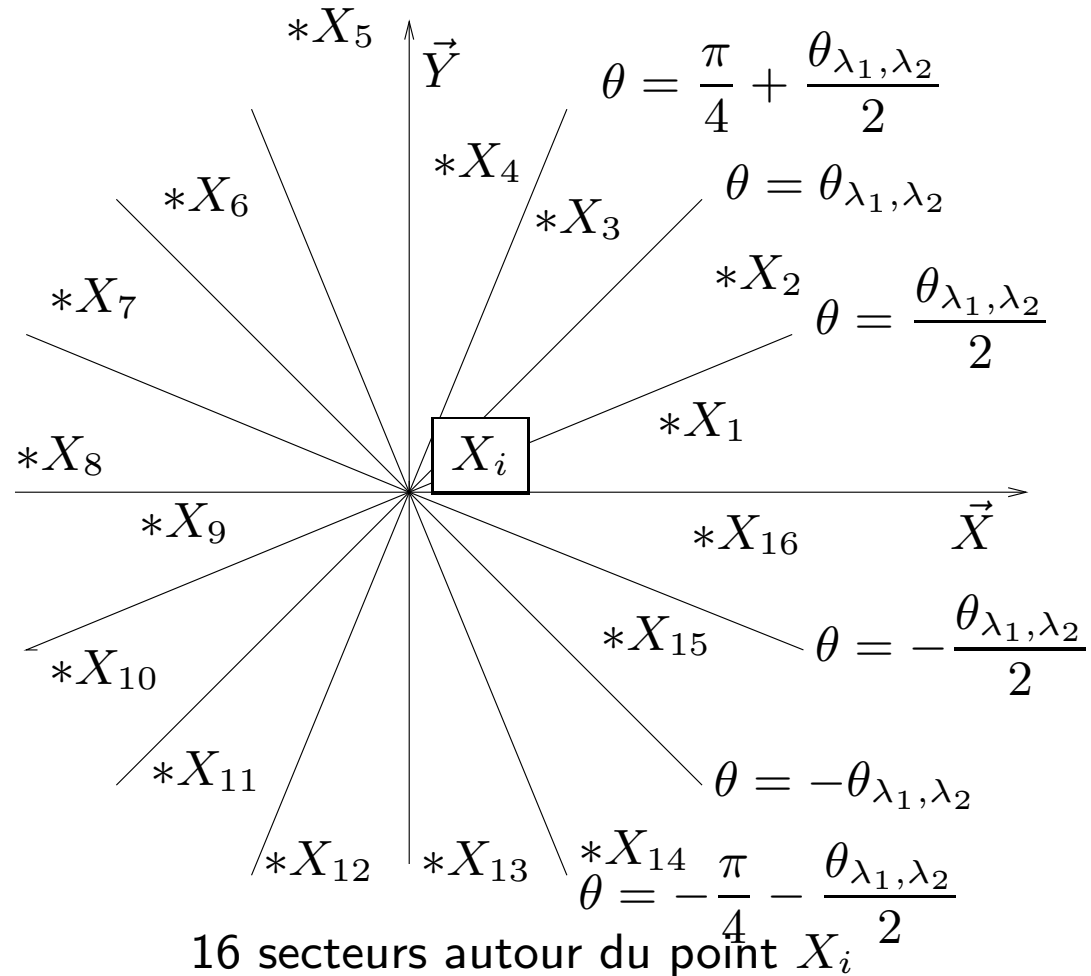
$$\nu = \frac{2}{\sum_{j=1,16} u_j \Delta x_j^2} = \frac{2}{\sum_{j=1,16} u_j \Delta y_j^2} \text{ et on approche l'expression } \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2}$$

par $\sum_{j=1,16} z_j (c_j - c_i)$.

Cas anisotrope

- Le tenseur $\overline{\overline{D}}$ symétrique est diagonalisable.
- (λ_1, λ_2) les 2 valeurs propres
- $\theta_{\lambda_1, \lambda_2} = \arctan\left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)$
- (X_i, \vec{X}, \vec{Y}) \vec{X} et \vec{Y} , vecteurs propres normés
- 16 secteurs, $\theta = \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$, $\theta = -\frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$,
 $\theta = -\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$, $\theta = \theta_{\lambda_1, \lambda_2}$, $\theta = -\theta_{\lambda_1, \lambda_2}$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- On suppose qu'il existe $X_j \in \mathcal{B}$ dans chaque secteur. La proposition précédente se généralise.

Cas anisotrope



Cas hétérogène

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} D_{1,1}(x, y) & D_{2,1}(x, y) \\ D_{2,1}(x, y) & D_{2,2}(x, y) \end{pmatrix}.$$

$D_{1,1}(x, y)$, $D_{2,2}(x, y)$ et $D_{2,1}(x, y)$ suffisamment régulières.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{1,1}(x, y) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + 2D_{2,1}(x, y) \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + D_{2,2}(x, y) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \\ \frac{\partial D_{1,1}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial D_{2,1}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} + \\ \frac{\partial D_{2,1}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial D_{2,2}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} = -S \end{array} \right. \quad (7)$$

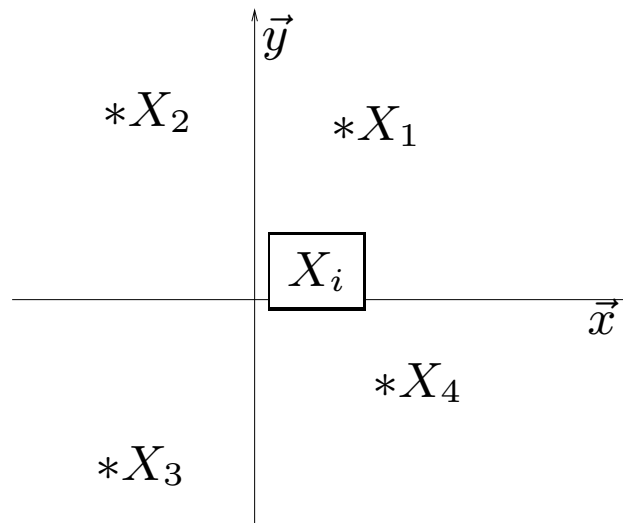
- Problème convectif-diffusif.
- Terme diffusif : les vecteurs propres dépendent de x, y . idem cas homogène anisotrope.

Cas hétérogène

Terme convectif

(pour $\frac{\partial C(x, y)}{\partial x}$): $M_x U_x = B_x$, avec $U_x = (u_{j_{\{1 \leq j \leq J\}}}^x)$, J étant le nombre de points apparaissant dans le stencil du schéma.

$$M_x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_J \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_J \end{pmatrix}, B_x = \begin{pmatrix} val_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$



4 secteurs autour du point X_i

Cas hétérogène

Proposition : s'il existe un ensemble de points $X_j \in \mathcal{B}$ satisfaisant la propriété décrite sur la figure précédente, alors il existe U_x , non nul positif tels que $M_x U_x = B_x$

- $\frac{\partial C(x, y)}{\partial x}$ approché par $\sum_{j=1,4} u_{j,x} (c_j - c_i)$
- même propriété pour $\frac{\partial C(x, y)}{\partial y}$
- Schéma d'ordre 1 type schéma décentré.
- Cas diffusif dominant : ordre 2 pour le terme convectif.

Propriétés : consistance

Soit C_h les valeurs de C en X_i , S_h les valeurs de S en X_i et A_h la matrice associée au schéma tel que $A_h C_h = S_h$.

- Pour chaque point à l'intérieur du maillage, ajout d'un nombre suffisant de points sur la frontière tel que la propriété décrite sur la figure précédente soit vérifiée.
- $rmax_i$ rayon minimum du cercle tel que les 16 points $X_j \in \mathcal{B}$ soient à l'intérieur de ce cercle.
- Hypothèse : $rmax_i$ tend vers 0 lorsque l'on raffine le maillage.

● Comme $\sum_{j=1,16} z_j \frac{\Delta x_j^2}{2} = \sum_{j=1,16} z_j \frac{\Delta y_j^2}{2} = 1$ avec $z_j \geq 0$, alors

$$z_j \leq \frac{2}{\Delta x_j^2} \text{ et } z_j \leq \frac{2}{\Delta y_j^2}.$$

$$\text{Donc } \sum_{j=1,16} z_j (c_j - c_i) = \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + \sum_{j=1,16} z_j O(\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}^3) =$$

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + O(rmax_i) \text{ ce qui prouve la consistance du schéma.}$$

Propriétés du schéma : consistance

Remarque

- On choisit les $X_j \in \mathcal{B}$ les plus proches de X_i appartenant aux 16 secteurs de la figure précédente.
- Pour un maillage de parallélogrammes d'angle aigu ν dont les côtés sont de longueur r , il existe une fonction positive g et un cercle de rayon $g(\nu)r$ tels que les points de la figure précédente soient à l'intérieur de ce cercle.
- La fonction g tend vers $+\infty$ lorsque ν tend vers 0. Le schéma reste consistant mais perd en précision.
- $r \max_i$ tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage.
- Même propriété, lorsque la régularité ne varie pas dans une convergence en maillage

Propriétés : principe du maximum

- Si la proposition précédente est vérifiée, les coefficients z_j sont tous positifs.
- La matrice A_h est irréductible.
- La matrice A_h est une M-matrice.
- Principe du maximum.

Propriétés : stabilité et convergence

- Pour $v = -(x^2 + y^2)$, $A_h v = A_0 = 2D_{1,1} + 2D_{2,2}$, $D_{1,1}$ et $D_{2,2}$ sont les termes de la diagonale de $\overline{\overline{D}}$.
- Avec principe du maximum, (Thèse I. Faille : (I.F.P.)) $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq G$ où $G = \frac{\|v\|_\infty}{A_0}$ est un coefficient strictement positif indépendant de $rmax = \max_{\{i=1, N_{ma}\}} rmax_i$.
- Si les hypothèses de la figure précédente sont satisfaites et si pour chaque point $X_i \in \mathcal{B}$ à l'intérieur du maillage, $rmax_i$ tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage, le schéma (DFPMD) est convergent en norme infini car il est consistant et stable. Il est au moins d'ordre 1.

Remarque

"On the non existence of monotone linear schema for some linear parabolic equations Comptes Rendus Mathematique, Volume 340, Issue 5, 1 March 2005, Pages 399-404 Christophe Buet, Stéphane Cordier"

- VF9 ou DF9 avec tenseurs anisotropes.
- DFPMD est une solution.
- Solution non linéaire.

Remarque

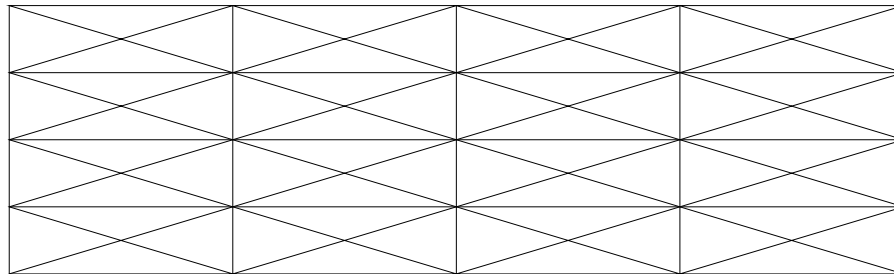
- Schéma en général non conservatif (sauf cas particulier) qui converge quand même!

Résultats numériques

Solution analytique stationnaire

- Exemple de E. Burman et A. Ern
- $\Omega =]0, 1.0[\times]0, 0.3[$
- Tenseur isotrope
- Rectangles découpés en 4 triangles
- Condition de Delaunay non vérifiée
- Conditions aux limites de Dirichlet : $C = 0$
- $C_{an}(x, y) = \sin(\pi x) \sin((\pi/0.3)y)$
- $S = -\operatorname{div} \overline{\overline{D}} \vec{\nabla} C_{an}$

Résultats numériques



Maillage de 64 triangles.

Résultats numériques

h,k	$\frac{1}{4}, \frac{0.3}{4}$	$\frac{1}{8}, \frac{0.3}{8}$	$\frac{1}{16}, \frac{0.3}{16}$	$\frac{1}{32}, \frac{0.3}{32}$
Nma	64	256	1024	4096
Erreur L^2	$9, 0.10^{-2}$	$2, 8.10^{-2}$	$8, 9.10^{-3}$	$4, 4.10^{-3}$
Ordre		1.66	1.68	1.0

h,k	$\frac{1}{64}, \frac{0.3}{64}$	$\frac{1}{128}, \frac{0.3}{128}$	$\frac{1}{256}, \frac{0.3}{256}$
Nma	16384	65536	262144
Erreur L^2	$1, 8.10^{-3}$	$8, 1.10^{-4}$	$4, 0.10^{-4}$
Ordre	1.32	1.12	1.04

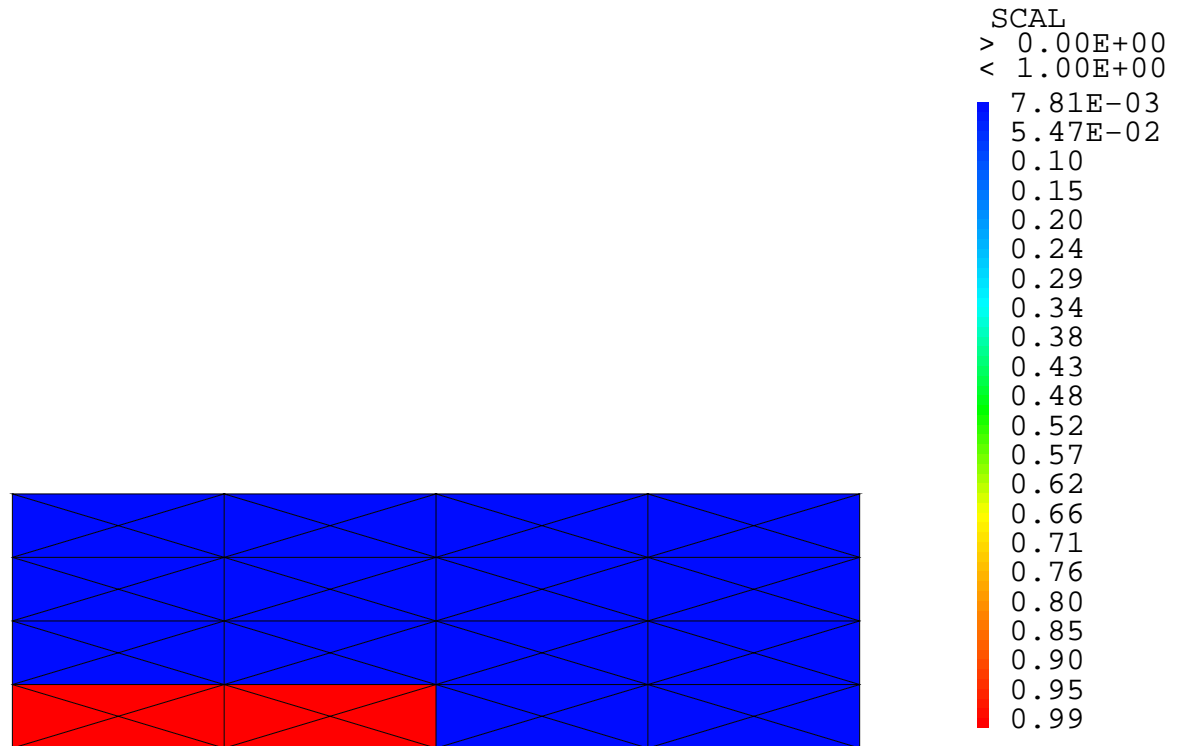
Erreur L^2 et ordre en fonction du pas de discrétisation

Résultats numériques

Solution stationnaire avec terme source discontinue

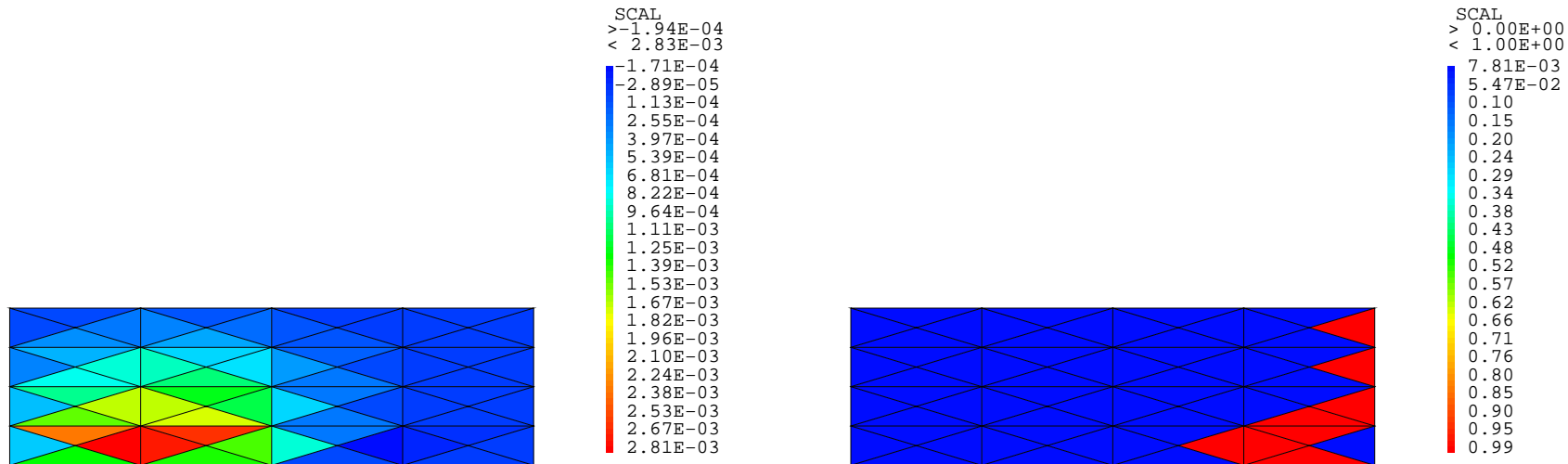
- Exemple de E. Burman et A. Ern
- $\Omega =]0, 1.0[\times]0, 0.3[$
- Cas isotrope
- Rectangles découpés en 4 triangles
- Conditions aux limites de Dirichlet : $C = 0$.
- $S = 1$ sur $]0., 0.5[\times]0., 0.075[$ et 0 sinon.
- EFMH/VF(MPFA)/DFPMD (F. Dabbène, G. Bernard-Michel, S. Gounand, C.L.P.)

Résultats numériques



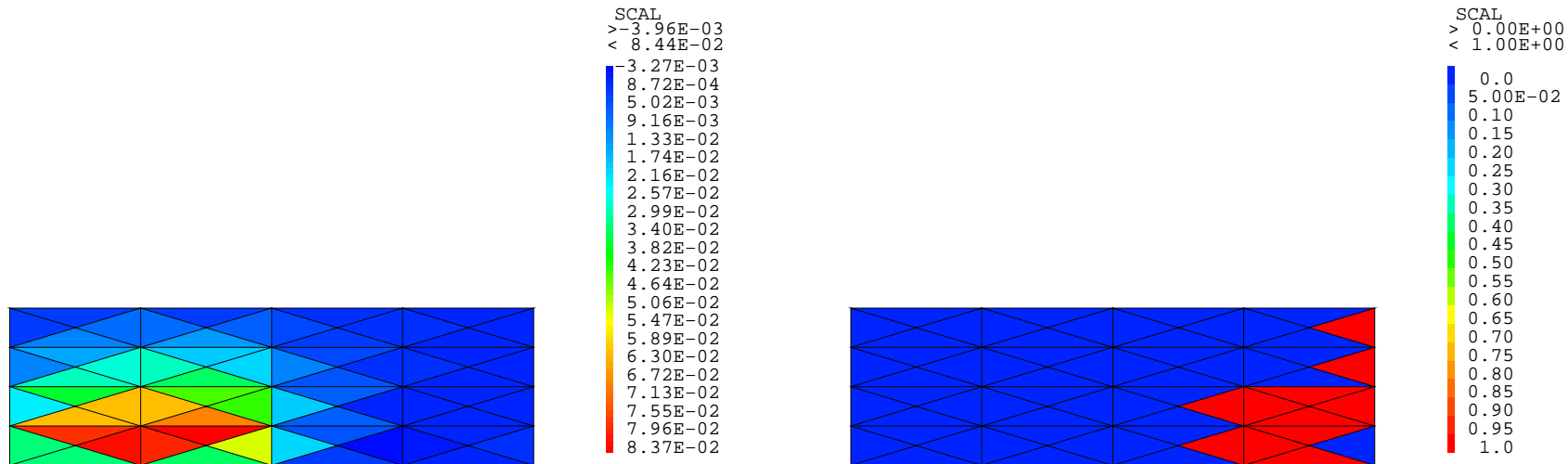
Maillage de 64 mailles et source.

Résultats numériques



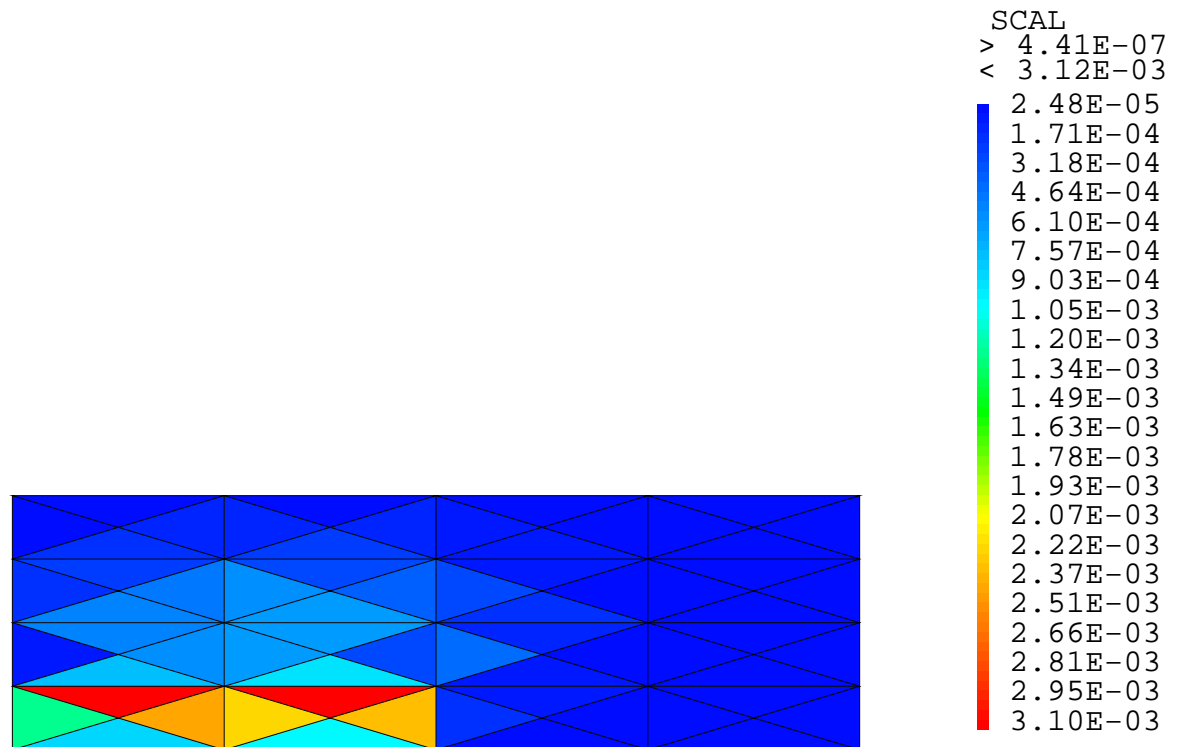
EFMH (concentration et lieu des valeurs négatives) 64 mailles, valeur minimum -1.94×10^{-4} , 12 % d'oscillations

Résultats numériques



VF(MPFA) (concentration et lieu des valeurs négatives) 64 mailles, valeur minimum -3.96×10^{-2} , 17 % d'oscillations

Résultats numériques



DFPMD (concentration) 64 mailles

Résultats numériques

Solution analytique stationnaire

- Inspiré par le benchmark de FVCA5 (R. Herbin et F. Hubert)
- $\Omega =]0, 1.0[\times]0, 1.0[$
- $\overline{\overline{D}} = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_\theta^{-1}$, R_θ , rotation d'angle $\theta = -67.5$ degrés
- Conditions aux limites de Dirichlet : $C = 0$
- $C_{an}(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$
- $S = -\operatorname{div} \overline{\overline{D}} \vec{\nabla} C_{an}$
- Maillage de carrés.

Résultats numériques

h	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
<i>Nma</i>	16	64	256	1024	4096
Erreur L^2	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$
Ordre		0.14	0.85	1.87	1.51

h	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
<i>Nma</i>	16384	65536	262144
Erreur L^2	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$
Ordre	1.68	1.85	1.92

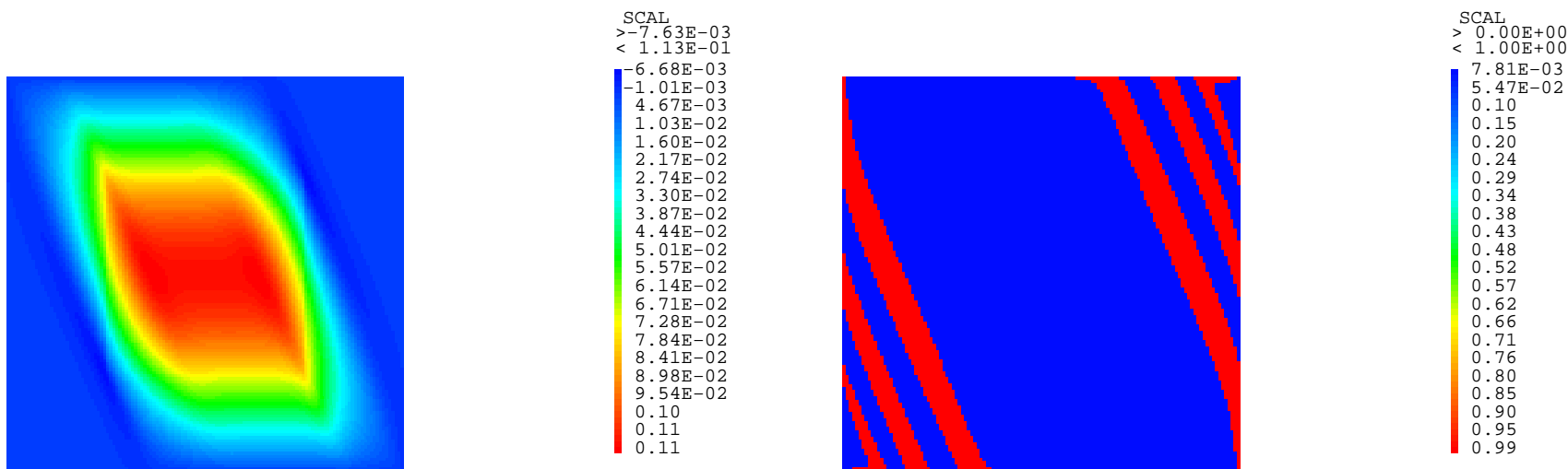
Erreur L^2 et ordre en fonction du pas de discrétisation

Résultats numériques

Solution stationnaire avec terme source discontinue

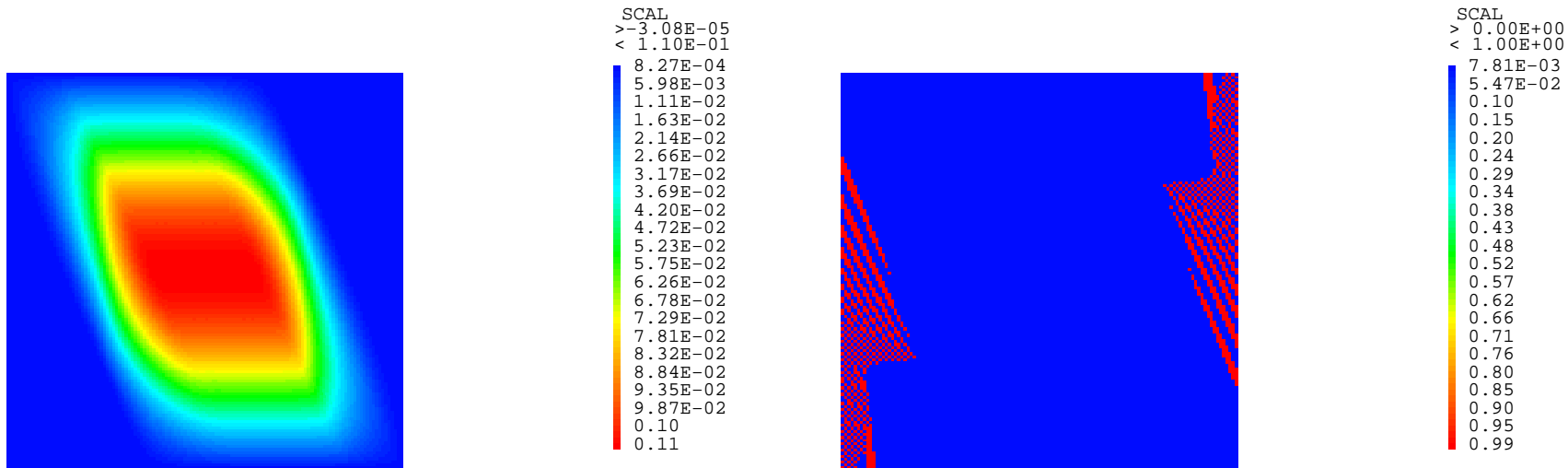
- $\Omega =]0, 1.0[\times]0, 1.0[$
- $\overline{\overline{D}} = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_\theta^{-1}$, R_θ est la rotation d'angle $\theta = -67.5$ degrés
- Conditions aux limites de Dirichlet : $C = 0$.
- $S = 1$ sur $]0.25, 0.75[\times]0.25, 0.75[$ et 0 sinon.
- Maillage de carrés.

Résultats numériques



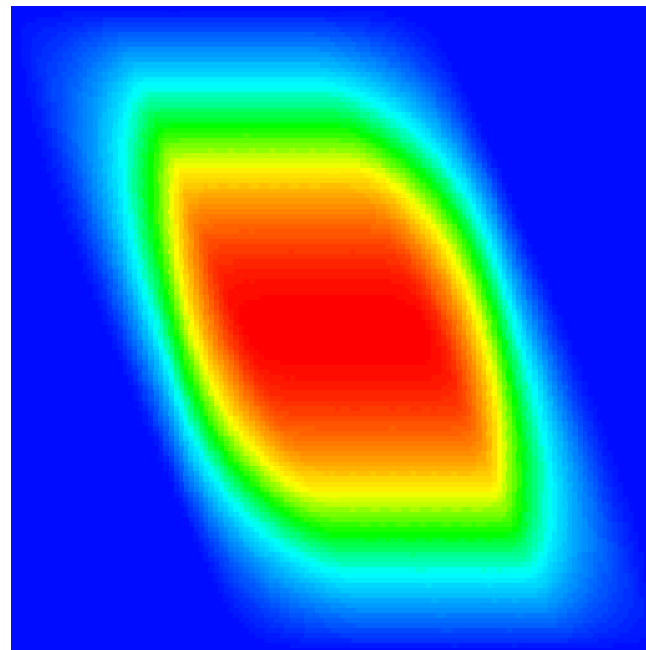
EFMH (concentration et lieu des valeurs négatives) 16384 mailles, valeur minimum -7.6×10^{-3} , 19 % d'oscillations

Résultats numériques



VFSYM (concentration et lieu des valeurs négatives) 16384 mailles, valeur minimum -3.0×10^{-5} , 7 % d'oscillations

Résultats numériques



SCAL
> 0.00E+00
< 1.10E-01

8.60E-04
6.02E-03
1.12E-02
1.63E-02
2.15E-02
2.66E-02
3.18E-02
3.70E-02
4.21E-02
4.73E-02
5.24E-02
5.76E-02
6.27E-02
6.79E-02
7.31E-02
7.82E-02
8.34E-02
8.85E-02
9.37E-02
9.89E-02
0.10
0.11

DFPMD (concentration) 16384 mailles

Conclusion

- Convergence numérique vérifiée.
- Système linéaire facile à inverser (Pas de Newton ou de point fixe).
- Prix de la méthode : ordre entre 1 et 2 en espace sur les maillages déformés et les tenseurs très anisotropes.
- Pour des maillages déformés avec tenseurs anisotropes, schéma ordre 1 : linéaire, schéma ordre 2 : non linéaire
- Propriétés proches des schémas approximant un terme convectif. Ordre 1 : schéma TVD, ordre 2 : schéma non linéaire.