



Eléments finis mixtes et non-conformes pour les équations de convection-diffusion-réaction

Linda El Alaoui et Alexandre Ern

CERMICS

École Nationale des Ponts et Chaussées

Marne-la-Vallée, France

GDR Momas



Plan

- Introduction
- Equation de convection-diffusion-réaction
 - Stabilisation par viscosité de sous-maille
 - Analyse d'erreur *a priori*
 - Formulation sur les échelles résolues
 - Schéma boîte
- Résultats numériques
- Conclusions



Introduction

- Stockage des déchets radioactifs
- Transport dans le milieu naturel
- Equations de convection–diffusion–réaction

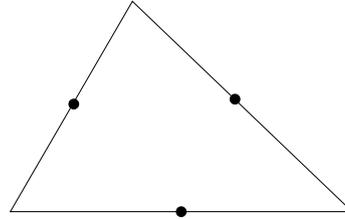


Introduction

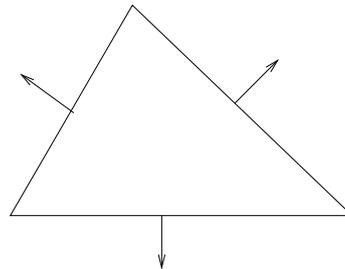
- Objectifs :
 - Approximation par EF dans un cadre non-conforme
 - Formulation mixte et schéma boîte
 - Schéma boîte pour les équations de Darcy (Courbet–Croisille(1998), Croisille (2000))
 - Formulation mixte dans $RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$
 - Formulation primale dans $P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$

Introduction

- $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$: Espace de Crouzeix–Raviart



- $RT^0(\mathcal{T}_h)$: Espace de Raviart–Thomas de plus bas degré



Introduction

- Problème modèle

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \nu u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

u concentration ; $\epsilon > 0$ diffusion ; β champ d'advection ; ν réaction

- Formulation faible dans $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega} \epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla u v + \int_{\Omega} \nu u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

- Existence et unicité : s'il existe $\sigma_0 \geq 0$ t.q. $\nu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \sigma_0$.



Hypothèses

- Adimensionalisation du problème $\implies \beta \sim O(1)$
- Hypothèses
 - ν au plus d'ordre 1
 - $\epsilon \leq 1$ et $h \leq 1$
 - la famille de triangulation $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est quasi-uniforme
 - $\beta \in P^0(\mathcal{T}_h)$ et $\nabla \cdot \beta = 0$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- J.-L. Guermond (1999)

- $X_h^e = P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \oplus \mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h),$

$$v_h^e = v_h + v_h^f.$$

- Espace des échelles résolues : $P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$
- Espace des échelles fluctuantes : $\mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h) = \text{vect}_{T \in \mathcal{T}_h} \{b_T^{\text{nc}}\}$
 b_T^{nc} bulle non-conforme de Fortin-Soulié

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- Introduisons sur $H_0^1(\Omega) + P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$ les normes suivantes :

$$|v|_{1,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|v|_{\beta,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\beta \cdot \nabla v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_J = \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \|\beta|_F^{\frac{1}{2}} [v]_F\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- Lemme 1 :

$$\inf_{w_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)} \sup_{v_h^f \in \mathcal{B}_{\text{nc}}(\mathcal{T}_h)} \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \beta \cdot \nabla w_h v_h^f}{|w_h|_{\beta,h} \|v_h^f\|_{0,\Omega}} \geq c > 0.$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- Soit $v_h^e \in X_h^e$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla v_h^e) v_h^e = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\beta \cdot n_T) (v_h^e)^2 = \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \beta \cdot [(v_h^e)^2]_F .$$

- Contrôle du terme de saut sur les faces par pénalisation.

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- On introduit

$$J_0(u_h^e, v_h^e) = - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}} \int_F \beta \cdot [u_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow,$$

$\mathcal{F}_h^{\text{in}}$: ensemble des faces de $\partial\Omega_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega : \beta \cdot n < 0\}$,
 $(v_h^e)^\downarrow = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} v_h^e(x + \gamma\beta)$, valeur aval de v_h^e .

- Pour tout $F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^{\text{in}}$ et pour tout $v_h^e \in X_h^e$

$$\frac{1}{2} \int_F \beta \cdot [(v_h^e)^2]_F - \int_F \beta \cdot [v_h^e]_F (v_h^e)^\downarrow = \frac{1}{2} \int_F |\beta|_F [v_h^e]_F^2,$$

$$\implies \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\beta \cdot \nabla v_h^e + \nu v_h^e, v_h^e)_{0,T} + J_0(v_h^e, v_h^e) \geq c \left(\|v_h^e\|_{0,\Omega}^2 + \|v_h^e\|_J^2 \right).$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- Formulation sur X_h^e

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h^e \in X_h^e \text{ tel que pour tout } v_h^e \in X_h^e \\ \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h^e \cdot \nabla v_h^e + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h^e + \nu u_h^e) v_h^e + J_0(u_h^e, v_h^e) + b_h(u_h^f, v_h^f)}_{= \Theta_h(u_h^e, v_h^e)} = (f, v_h^e) \end{array} \right.$$

$$b_h(u_h^f, v_h^f) = c_b \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \int_T \nabla u_h^f \cdot \nabla v_h^f,$$

où $c_b > 0$, indépendante de ϵ et h .

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- Analyse d'erreur *a priori* dans l'esprit du second lemme de Strang
 - Stabilité (condition inf-sup discrète)
 - Continuité
 - Consistance
 - Approximation
- Deux normes différentes (stabilité, continuité) sur $H_0^1(\Omega) + P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$

$$\|v\|_A = \|v\|_{0,\Omega} + \|v\|_J + \epsilon^{\frac{1}{2}} |v|_{1,h} + h|v|_{\beta,h},$$

$$\|v\|_{h,\frac{1}{2}} = \|v\|_A + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h} \|v\|_{0,F}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- **Lemme 2** : Stabilité.

$$\forall v_h^e \in X_h^e, \quad \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\Theta_h(v_h^e, w_h^e)}{\|w_h^e\|_A} \geq c \left(\|v_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |v_h^f|_{1,h} \right).$$

- **Corollaire** : Le problème posé sur X_h^e admet une et une seule solution.

- **Lemme 3** : Continuité.

Il existe une constante c t.q. pour tout

$$(v, w) \in H_0^1(\Omega) \times [H_0^1(\Omega) + P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)],$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\epsilon \nabla v, \nabla w)_{0,T} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\beta \cdot \nabla v + \nu v, w)_{0,T} \leq c \|v\|_{h, \frac{1}{2}} \|w\|_A.$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- **Lemme 4** : Estimation d'erreur.

Posons

$$R_h(u) = \sup_{w_h^e \in X_h^e} \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\epsilon \nabla u, \nabla w_h^e)_{0,T} + (\beta \cdot \nabla u + \nu u, w_h^e)_{0,\Omega} - (f, w_h^e)_{0,\Omega}}{\|w_h^e\|_A}.$$

Alors, il existe une constante c telle que

$$\|u - u_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h} \leq c \left(\|u - \Pi_h u\|_{h, \frac{1}{2}} + R_h(u) \right),$$

où Π_h est la projection $L^2(\Omega)$ -orthogonale sur $P_{c,0}^1(\mathcal{T}_h)$.

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- **Lemme 5** : Approximabilité.

Il existe une constante c telle que

$$\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \|v - \Pi_h v\|_{h, \frac{1}{2}} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}) \|v\|_{2, \Omega}.$$

- **Lemme 6** : Consistance.

Il existe une constante c telle que

$$R_h(u) \leq c\epsilon^{\frac{1}{2}} h \|u\|_{2, \Omega}.$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- **Théorème** : Convergence.

Il existe une constante c telle que

$$\|u - u_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{2,\Omega}.$$

- **Preuve.**

$$\begin{aligned} \|u - u_h^e\|_A + h^{\frac{1}{2}} |u_h^f|_{1,h} &\leq c \left(\|u - \Pi_h u\|_{h, \frac{1}{2}} + R_h(u) \right) \\ &\leq ch(h^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- Condensation des bulles $\{b_T^{\text{nc}}\}_{T \in \mathcal{T}_h}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que pour tout } v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h + \nu u_h) v_h + s_h(u_h, v_h) = l(v_h). \end{array} \right.$$

$$s_h(u_h, v_h) = J_0(u_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{(\beta \cdot \nabla u_h + \nu u_h, b_T^{\text{nc}})_{0,T} (\beta \cdot \nabla b_T^{\text{nc}} + \nu b_T^{\text{nc}}, v_h)_{0,T}}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})},$$

$$l(v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{(f, b_T^{\text{nc}})_{0,T} (\beta \cdot \nabla b_T^{\text{nc}} + \nu b_T^{\text{nc}}, v_h)_{0,T}}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})}.$$

Stabilisation par viscosité de sous-maille

- Existence et unicité

u_h^e est solution du problème posé dans X_h^e si et seulement si

- sa composante aux échelles résolues u_h est solution du problème posé dans $P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$
- sa composante aux échelles fluctuantes u_h^f est telle que

$$u_h^f = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{(f, b_T^{nc})_{0,T} - a_h(u_h, b_T^{nc})}{\Theta_h(b_T^{nc}, b_T^{nc})} b_T^{nc} .$$

- Estimation d'erreur *a priori*

$$\|u - u_h\|_A + (h^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}}) |u_h^f|_{1,h} \leq ch(\epsilon^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{2,\Omega} .$$

Formulation mixte

- Problème mixte

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma + \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \epsilon \nabla \cdot \sigma + \beta \cdot \nabla u + \nu u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

- Formulation faible dans $H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma, u) \in H(\text{div}; \Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \tau = 0, \quad \forall \tau \in [L^2(\Omega)]^d \\ \int_{\Omega} \epsilon \nabla \cdot \sigma v + \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla u v + \int_{\Omega} \nu u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

- Existence et unicité : si $\nu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq 0$ grâce au théorème de Banach–Nečas–Babuška.

Formulation mixte

- Théorème de Banach–Nečas–Babuška

Soit W un espace de Banach et soit V un espace de Banach réflexif.
Soient $T \in \mathcal{L}(W, V')$ et $f \in V'$. Le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in W \text{ tel que :} \\ Tu = f \quad \text{dans } V' \end{array} \right.$$

est bien posé si et seulement si

- $\exists \alpha > 0, \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{\langle Tw, v \rangle_{V',V}}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha,$
- $\forall v \in V, \quad (\forall w \in W, \langle Tw, v \rangle_{V',V} = 0) \Rightarrow (v = 0).$

Discrétisation par schéma boîte

- Discrétisation par schéma boîte

On suppose $\nu = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que pour tout} \\ \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h + t_{1,h}(u_h, \tau_h) = 0, \quad \forall \tau_h \in [P^0(\mathcal{T}_h)]^d \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T [\epsilon \nabla \cdot \sigma_h + \beta \cdot \nabla u_h] v_h = \int_{\Omega} f v_h, \quad \forall v_h \in P^0(\mathcal{T}_h), \end{array} \right.$$

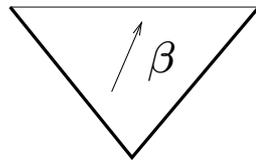
Discrétisation par schéma boîte

où

$$t_{1,h}(u_h, \tau_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{(\beta \cdot \nabla u_h + \nu u_h, b_T^{\text{nc}})(b_T^{\text{nc}} \beta, \tau_h)_{0,T}}{\Theta_h(b_T^{\text{nc}}, b_T^{\text{nc}})} + \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial T^{\text{in}}} |\beta \cdot n_T| (u_h^{\text{i}} - u_h^{\text{o}})(\pi_h^1 \cdot \tau_h)|_T \right],$$

avec

$$\partial T^{\text{in}} = \{x \in \partial T, \beta \cdot n_T < 0\}.$$



$$u_h^{\text{i}}(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in T}} u_h(y) \quad \text{et} \quad u_h^{\text{o}} = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \notin T}} u_h(y).$$

Discrétisation par schéma boîte

- Elimination de σ_h : $\tau_h = \epsilon \nabla v_h$ pour $v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h)$
 - Formulation primale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \text{ tel que pour tout } v_h \in P_{\text{nc},0}^1(\mathcal{T}_h) \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla u_h) v_h + s_h(u_h, v_h) = l(\Pi^0 v_h). \end{array} \right.$$

$s_h(\cdot, \cdot)$ se déduit de $t_{1,h}(\cdot, \cdot)$.

- Reconstruction de σ_h sur un patch d'éléments de la triangulation

Schéma boîte

- $(\sigma_h, u_h) \in RT^0(\mathcal{T}_h) \times P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$ est solution du schéma boîte ssi
 - u_h est solution du problème posé dans $P_{nc,0}^1(\mathcal{T}_h)$
 - σ_h vérifie la formule de reconstruction suivante pour tout $T \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned}\sigma_h|_T = & -\nabla u_h|_T - \frac{a_h(u_h, b_T^{nc})}{\epsilon \Theta_h(b_T^{nc}, b_T^{nc})} \Pi^0(b_T^{nc} \beta) \\ & - \frac{1}{\epsilon|T|} \int_{\partial T^{in}} |\beta \cdot n_T| (u_h^i - u_h^o) \pi_h^1|_T \\ & + \frac{1}{d} (-\beta \cdot \nabla u_h|_T + f_h|_T) \pi_h^1|_T.\end{aligned}$$

Résultats numériques

- $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \left(1 - \tanh\left(\frac{0.5-x}{a_w}\right) \right),$$

avec $a_w = 0.05$

- couche intérieure en $x = 0.5$
- $\beta = (1, 0)^T$, $\nu = 1$ et $\epsilon \in \{1, 10^{-2}, 10^{-4}\}$
- $c_b = 1$
- triangulation quasi-uniforme et non-structurée

Résultats numériques

- Erreur réelle dans la norme $\|\cdot\|_A$ et ordres de convergence, α , pour $\epsilon = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-4}$

Maillage		$\epsilon = 1$		$\epsilon = 10^{-2}$		$\epsilon = 10^{-4}$	
Na	h	$\ u - u_h^e\ _A$	α	$\ u - u_h^e\ _A$	α	$\ u - u_h^e\ _A$	α
374	0.1	0.9605	-	0.3222	-	0.2939	-
1441	0.05	0.4608	1.06	0.1232	1.39	0.1009	1.54
5621	0.025	0.2156	1.09	0.0470	1.40	0.0337	1.58
22330	0.0125	0.1028	1.07	0.0192	1.29	0.0118	1.51
88961	0.00625	0.0497	1.05	0.0085	1.17	0.0044	1.41

Conclusions

- Stabilisation par viscosité de sous-maille dans un cadre non-conforme
 - Aucun paramètre à choisir en fonction de ϵ et h
 - Analyse d'erreur *a priori*
 - Formulation sur les échelles résolues
 - Schéma boîte

- Autres méthodes de stabilisation dans un cadre non-conforme
 - Pénalisation des sauts des gradients sur les faces (Burman 03)
 - Conditions limites de type Robin-Neumann
 - Aucun paramètre à choisir en fonction de ϵ et h
 - Analyse d'erreur *a priori*
 - Schéma boîte en cours



Conclusions

- Analyse d'erreur *a posteriori*
 - Analyse par résidu
 - Analyse hiérarchique en cours
 - Maillages adaptatifs pour des problèmes présentant des couches intérieures