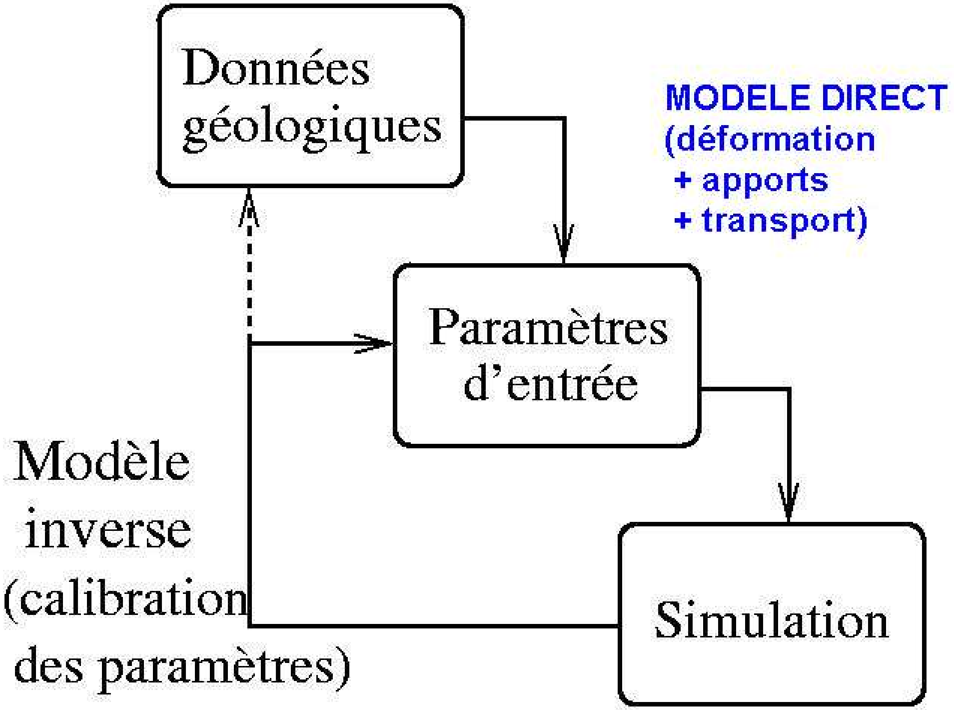
Simulation numérique d'un modèle stratigraphique sous contrainte de taux d'érosion maximal

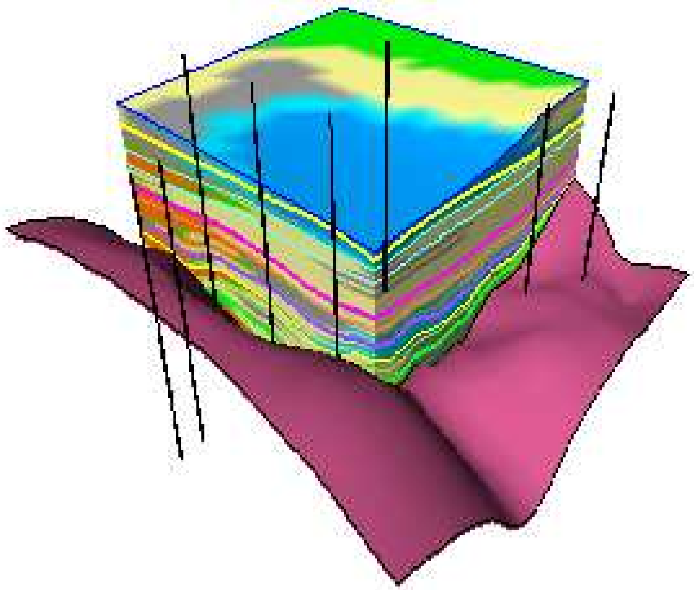
V. Gervais[‡], R. Masson[‡]

[‡]Institut Français du Pétrole, 1 et 4 av. de Bois Preau 92852 Rueil Malmaison Cedex

Introduction

<u>But :</u> Reconstruire l'histoire géologique d'un bassin sédimentaire



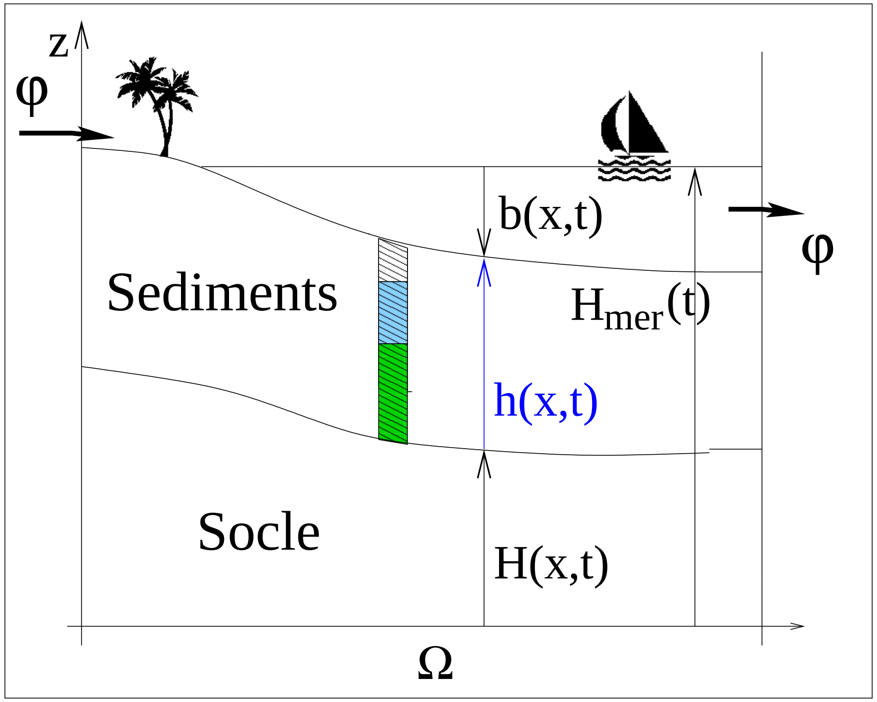


Caractéristiques du modèle

- Modèle diffusif multi-lithologique

Données : $H(x,t)$, $H_{mer}(t)$, φ

- Contrainte sur le taux d'érosion des sédiments



Plan :

1. **Modèle mathématique**
2. **Discrétisation Volume Fini**
3. **Résultats numériques**
4. **Solveurs linéaires itératifs**
5. **Conclusion et perspectives**

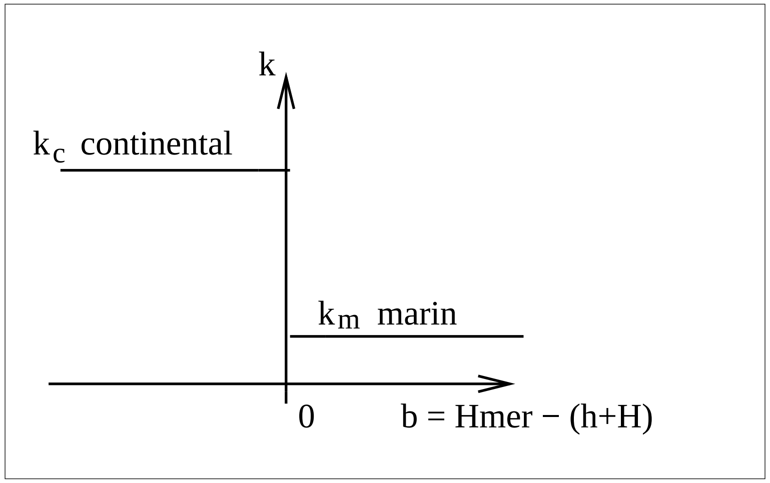
Modèle de transport gravitaire des sédiments

- Flux surfaciques proportionnels à la pente

  bathymétrie : $b = H_{mer} - (H + h)$

  $\Rightarrow \varphi = -k(b)\,\nabla(h + H)$

  avec $k(b) > 0$: coefficient de diffusion.



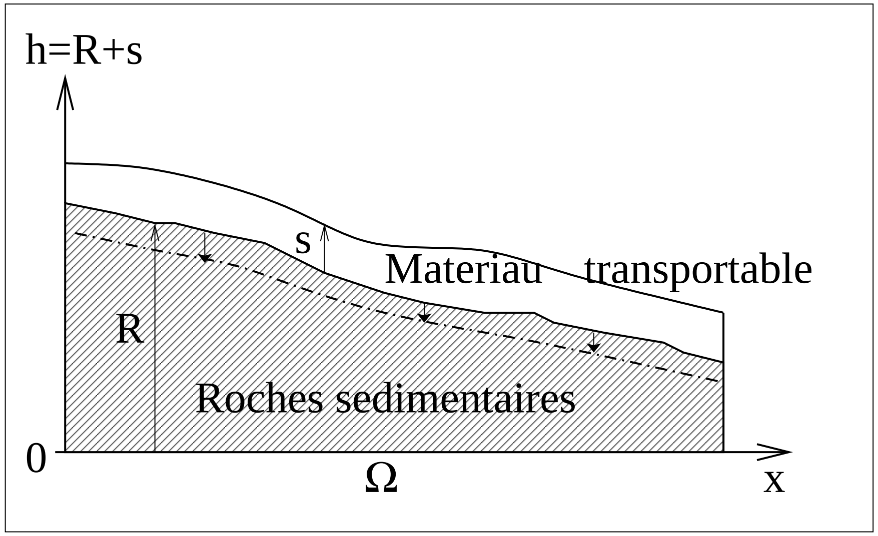
- Conservation de la masse des sédiments :

$$\partial_t h + \mathrm{div}\left[-k(b)\,\nabla(h + H)\right] = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T)$$

- CL de type Neumann

Contrainte sur le taux d'érosion

- L'érosion ($\partial_t h < 0$) et la sédimentation ($\partial_t h \geq 0$) sont des **processus dissymétriques** : la quantité de sédiments transportés **ne peut excéder la disponibilité en matériau mobile**
- Production "in situ" de sédiments érodables par transformation des roches



$\Longrightarrow$ Contrainte sur le taux d'érosion [Granjeon, Joseph 97] :

$$\partial_t h \geq -E$$

où $E(x,t) \geq 0$: **taux d'érosion maximal admissible**.

Formulation mathématique du couplage

- Introduction d'une variable supplémentaire $\lambda \leq 1$ $\Rightarrow$ nouveau flux

$$\mathrm{f} = \lambda\varphi \text{ : flux ``limité''}$$

- Fermeture du problème : $\begin{cases} \partial_t h + E > 0 \Rightarrow \quad \lambda = 1 & \text{modèle diffusif} \\ \lambda < 1 \Rightarrow \quad \partial_t h + E = 0 & \text{contrainte active} \end{cases}$

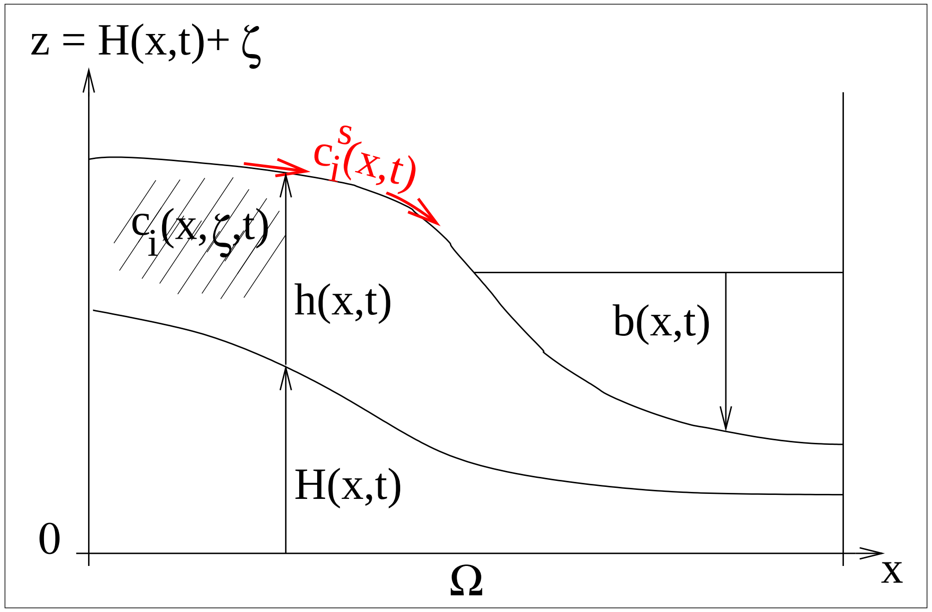
<u>Modèle couplé :</u>

Conservation de la masse : $\partial_t h + \mathrm{div}\left[-\lambda\, k(b)\, \nabla(h + H)\right] = 0,$

Contrainte : $\begin{cases} (\partial_t h + E)(1 - \lambda) = 0, \\ (\partial_t h + E) \geq 0,\ (1 - \lambda) \geq 0, \end{cases}$ sur $\Omega \times (0, T)$.

$+$ CL, CI

Modèle multi-lithologique



Bassin sédimentaire,

L lithologies (sable, argile, ...)

- L concentrations $c_i(x,\zeta,t) \geq 0$ dans le bassin, $x \in \Omega$, $t \geq 0$, $\zeta \in (0,h(x,t))$, avec $\sum_{i=1}^{L} c_i = 1$,
- L concentrations de surface $c_i^s(x,t) \geq 0$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$, avec $\sum_{i=1}^{L} c_i^s = 1$

- Flux diffusif proportionnel à la concentration de surface c_i^s [Rivenaes 92] :

$$\varphi_i = -\, c_i^s \, k_i(b) \, \nabla(h+H)$$

Equations de conservation

Equations de conservation à l'intérieur du bassin : $\zeta \in (0, h(x,t))$

$$\begin{cases} \partial_t c_i = 0 & \text{sur } \{(x,\zeta,t) \,|\, (x,t) \in \Omega \times (0,T),\ \zeta \in (0,h(x,t))\}, \\ c_i|_{\zeta=h} = c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+ = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\}, \\ c_i|_{t=0} = c_i^0 & \text{sur } \{(x,\zeta) \,|\, x \in \Omega,\ \zeta \in (0, h|_{t=0}(x))\}. \end{cases}$$

Equations de conservation sur $\Omega \times (0,T)$ *:*

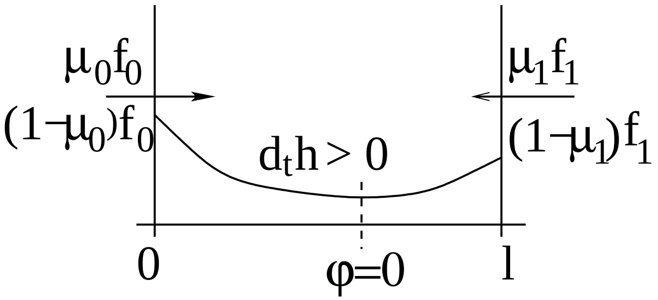
- Conservation de la fraction $\mathcal{M}_i(x,t) = \int_0^{h(x,t)} c_i(x,\zeta,t)\, d\zeta$ en lithologie i :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_i|_{\zeta=h}\, \partial_t h + \mathrm{div}\, [\underbrace{-\lambda\, c_i^s\, k_i(b)\, \nabla(h+H)}_{\mathrm{f}_i = \lambda\, \varphi_i}] = 0, \\ \sum_{i=1}^{L} c_i^s = 1, \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega \times (0,T).$$

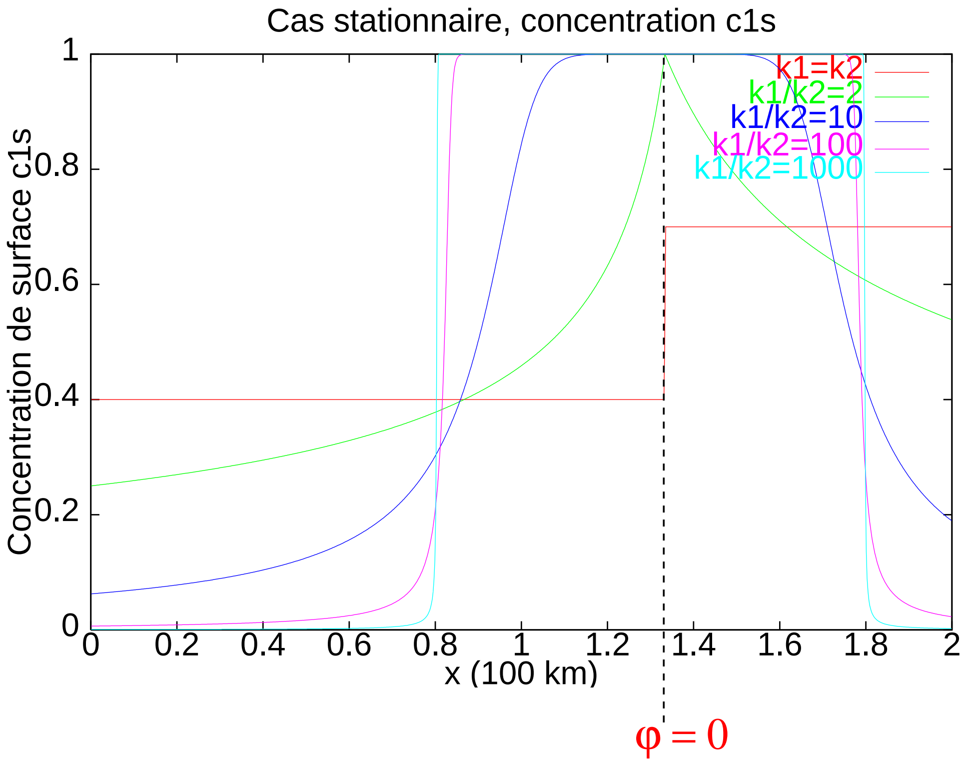
- Contraintes sur $(\partial_t h + E)$ et $(1 - \lambda)$ inchangées

Solutions particulières

Cas bilithologique 2D sans contrainte sur le taux d'érosion - $k_i(b) = k_i$
$\longrightarrow$ **Solution "stationnaire" :** $\partial_t c_1^s = 0$ **et** $\partial_t^2 h = 0$
$\Rightarrow$ **Le taux** $\partial_t h$ **est constant et le flux global** φ **ne dépend que de** x.



$$\begin{cases} f_0 = 0.2\,m^2/an,\ f_1 = -0.1\,m^2/an, \\ \mu_0 = 0.4,\ \mu_1 = 0.7, \\ c_{1\,|(t=0)} = c_{2\,|(t=0)} = 0.5. \end{cases}$$



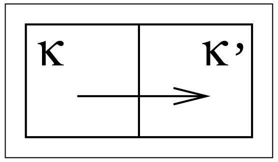
Discrétisation

$\rightarrow$ *Discrétisation volume fini centrée sur les cellules et intégration implicite en temps*

Flux : - Approximation différence finie centrée du gradient

- Décentrage amont de λ et c_i^s aux arêtes par rapport à $\nabla(h+H)\cdot\vec{n}_{\kappa\kappa'}$

$$|\kappa|\,\Delta\mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1} + \Delta t^{n+1}\sum_{\kappa'} \mathrm{f}_{i,\kappa\kappa'}^{n+1} = 0,$$



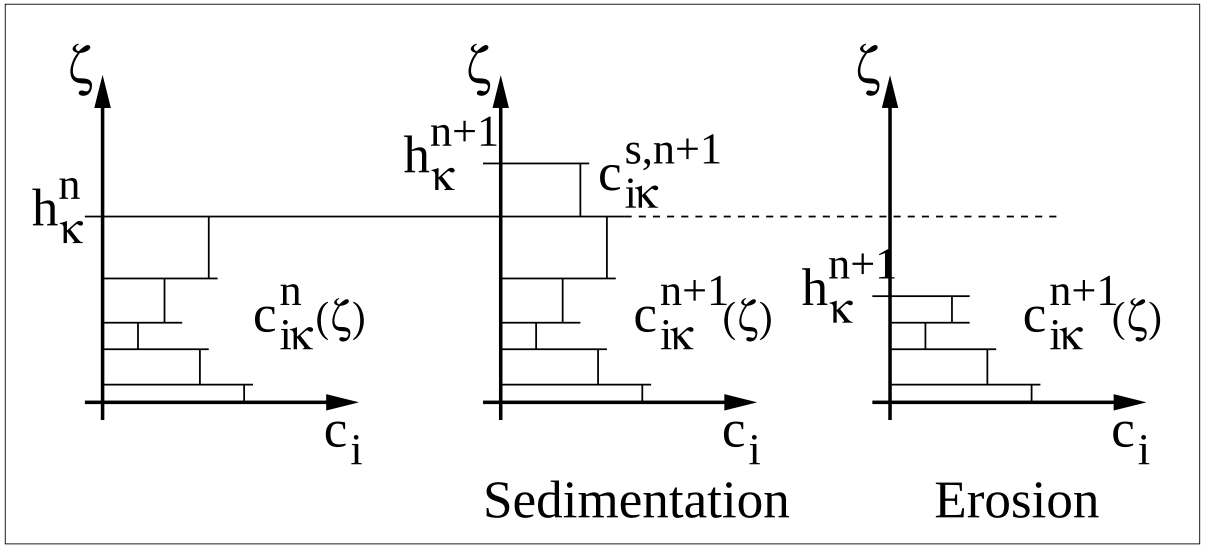
$$\begin{cases} \lambda_{\kappa\kappa'} = \lambda_\kappa \\ c_{i,\kappa\kappa'}^s = c_{i,\kappa}^s \end{cases}$$

Contrainte : Intégration de l'équation $\partial_t\tilde{\mathcal{H}} = -E_\kappa(t)$, $\tilde{\mathcal{H}}(t^n) = h_\kappa^n \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}_\kappa^{n+1}$

$$\Longrightarrow h_\kappa^{n+1} \geqslant \tilde{\mathcal{H}}_\kappa^{n+1}$$

Discretisation (2)

Concentrations de colonne :



$$\Delta \mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1} = \begin{cases} c_{i,\kappa}^{s,n+1}\left(h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n\right) & \text{si } h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n, \\ \int_{h_\kappa^n}^{h_\kappa^{n+1}} c_{i,\kappa}^n(\zeta)\,d\zeta & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ***Système non linéaire*** **; inconnues : h_κ, λ_κ et $c_{i,\kappa}^s$ pour $i = 1, ..., L$ et $\kappa \in \mathcal{K}$.**

Propriétés du schéma

- Existence : le schéma admet au moins une solution (théorème du point fixe de Brouwer)

- Stabilité : • Toute solution vérifie, pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $i = 1, ..., L$ et $n \geq 0$,

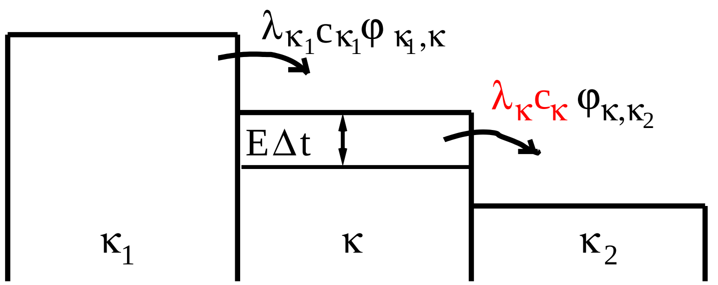
$$\begin{cases} \lambda_\kappa^{n+1} \in [0,1] \\ c_{i,\kappa}^{s,n+1} \in [0,1] \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(z) \in [0,1] \text{ pour tout } z < h_\kappa^{n+1} \end{cases}$$

• Principe du maximum sur la solution approchée pour h

- *Cas particulier* : Convergence vers une solution faible du problème (voir exposé de R. Masson)

Stabilité

$\longrightarrow$ **Par induction sur n et sur les volumes de contrôle $\kappa \in \mathcal{K}$ triés par ordre de topographie h_κ décroissantes. Par hypothèse :**



Flux entrants :

$$\sum_{\substack{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa \\ h_\kappa^{n+1} < h_{\kappa'}^{n+1}}} T_{\kappa\kappa'} \lambda_{\kappa'}^{n+1} c_{i,\kappa'}^{s,n+1} k_{i,\kappa\kappa'}^{n+1} (h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) \leqslant 0$$

- **Sédimentation :** $\lambda_\kappa^{n+1} = 1$ **et**

$$c_{i,\kappa}^{s,n+1} \left(\frac{h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n}{\Delta t^{n+1}} |\kappa| + \sum_{\substack{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa \\ h_\kappa^{n+1} \geqslant h_{\kappa'}^{n+1}}} T_{\kappa\kappa'} k_{i,\kappa\kappa'}^{n+1} (h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) \right) \geqslant 0$$

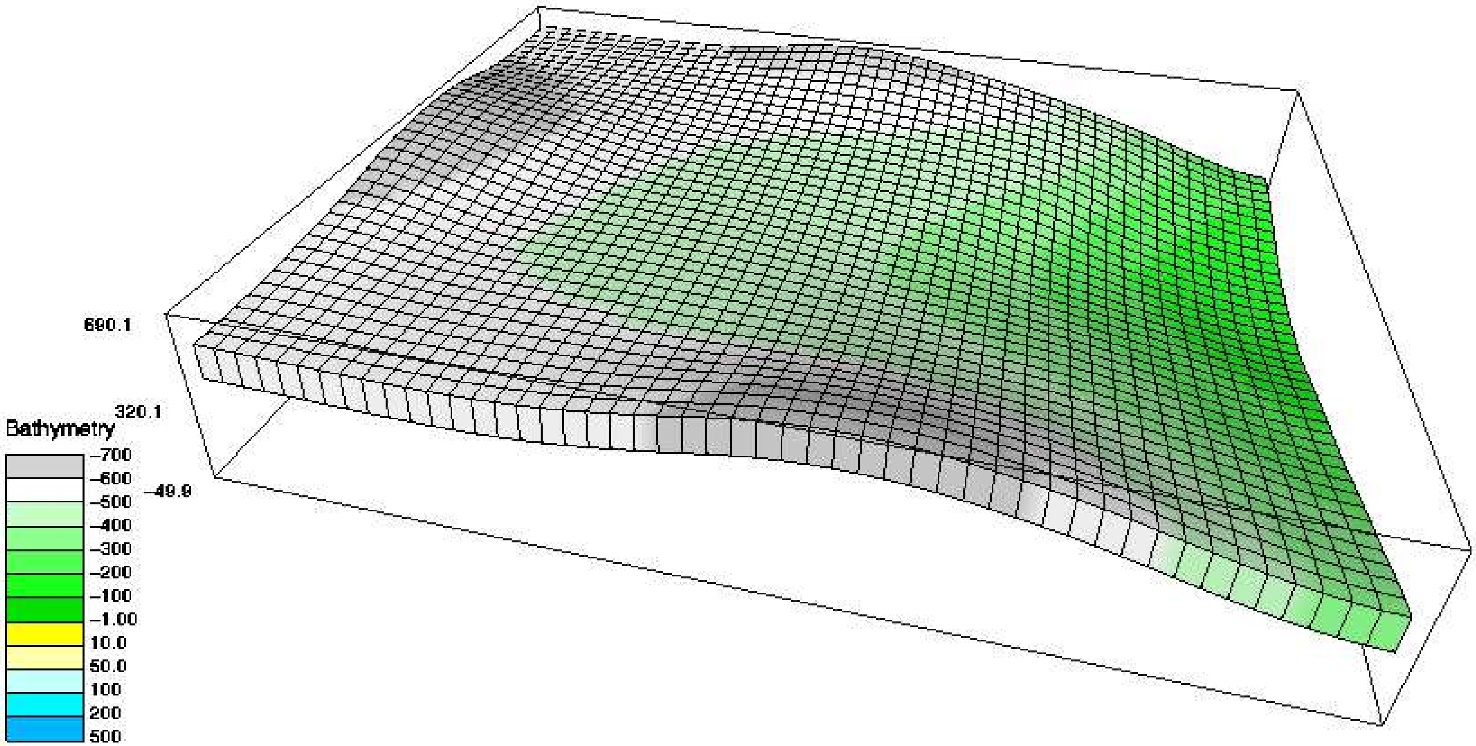
- **Erosion :** $$\lambda_\kappa^{n+1} c_{i,\kappa}^{s,n+1} \left(\sum_{\substack{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa \\ h_\kappa^{n+1} \geqslant h_{\kappa'}^{n+1}}} T_{\kappa\kappa'} k_{i,\kappa\kappa'}^{n+1} (h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) \right) \geqslant 0$$

Exemple numérique

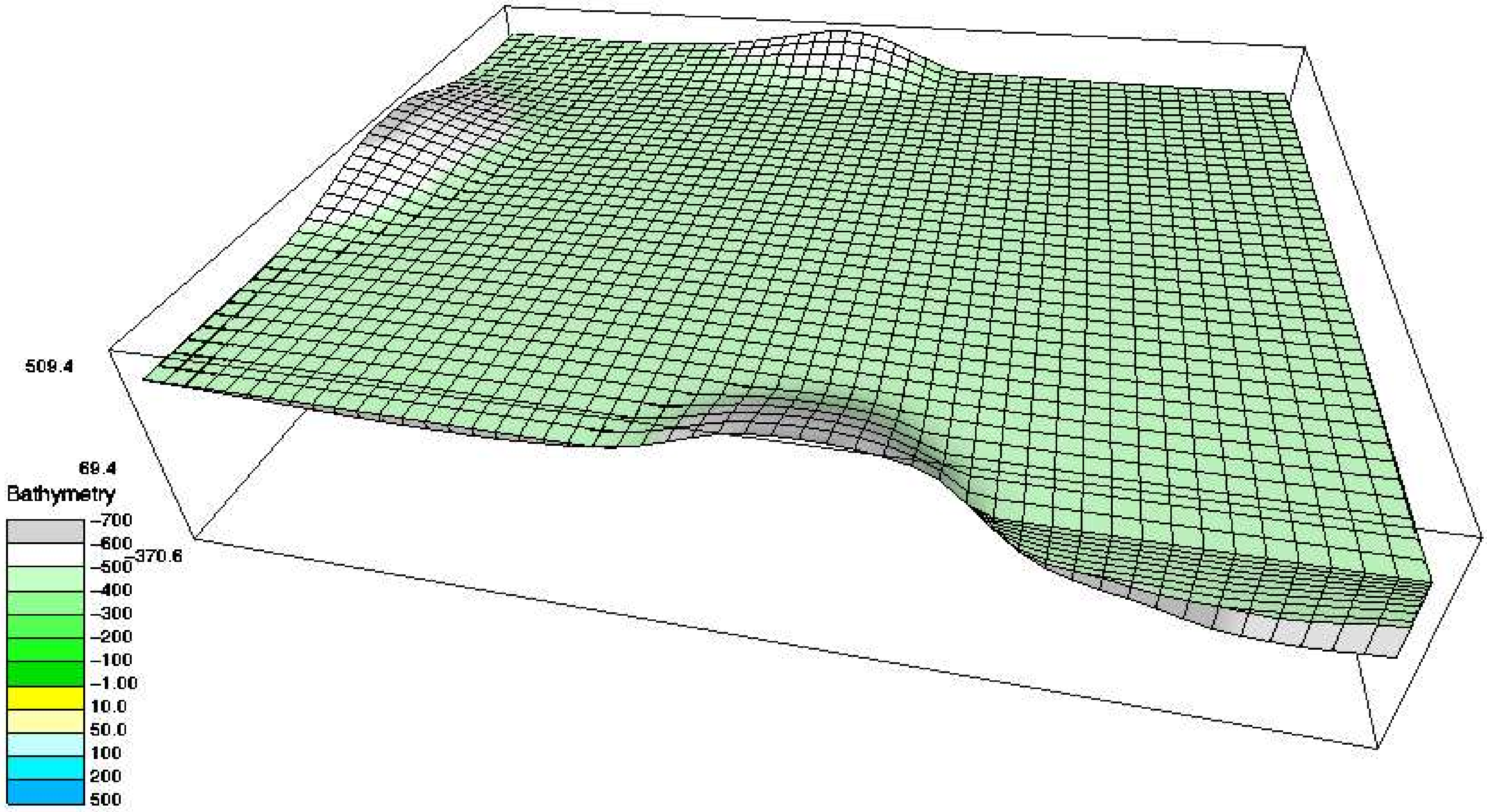
- *Bassin :* 500 km $\times$ 400 km
- *Durée :* -245 $\longrightarrow$ -205 Ma
- *Lithologies :* Sable, argile
- *Taux d'érosion maximum :* E=100 m/Ma
- Subsidence
- Apports de sédiments aux frontières
- *Coefficients de diffusion :* (km^2/ka)

	k_{ic}	k_{im}
Sable	10	1
Argile	200	4

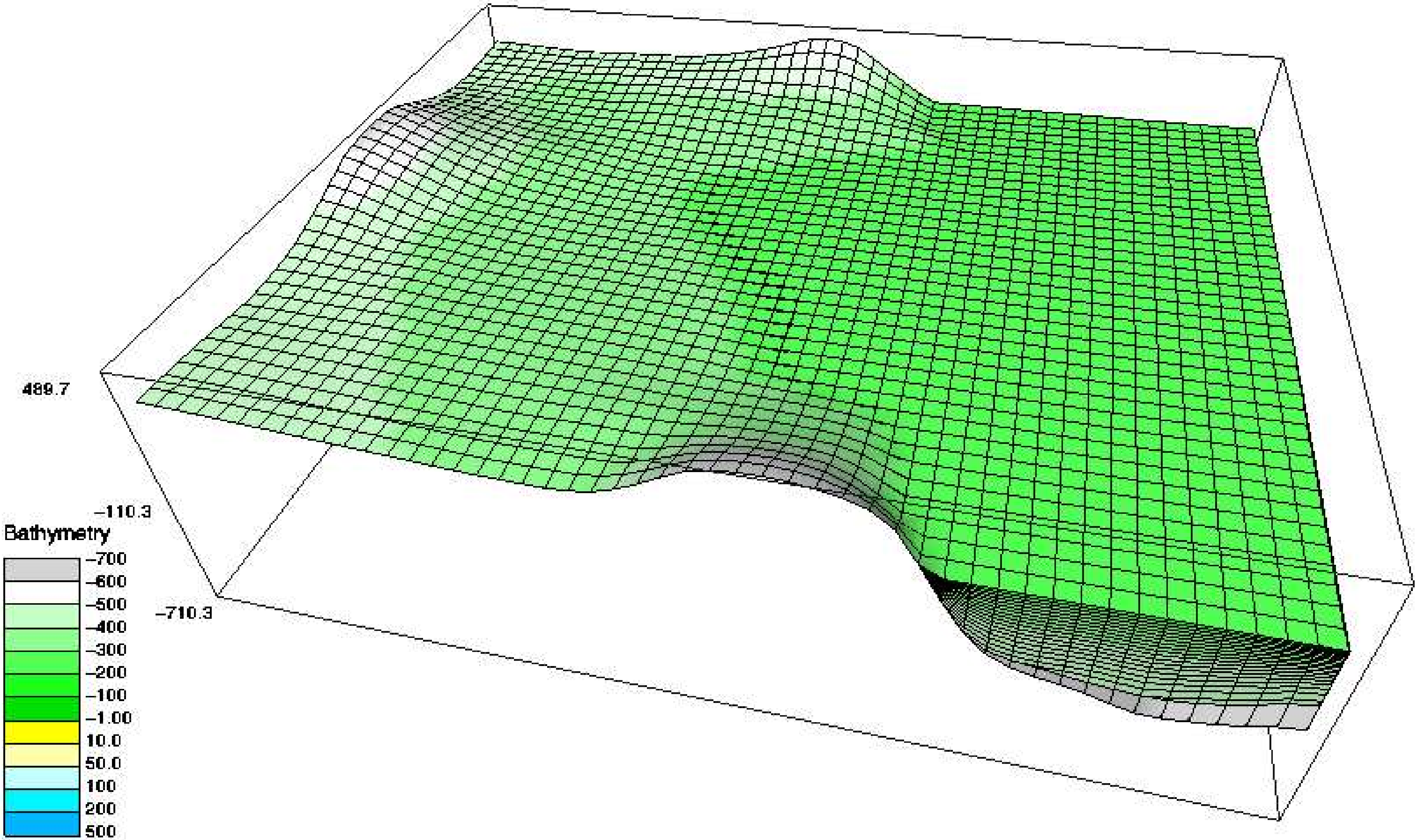
T = -245 Ma



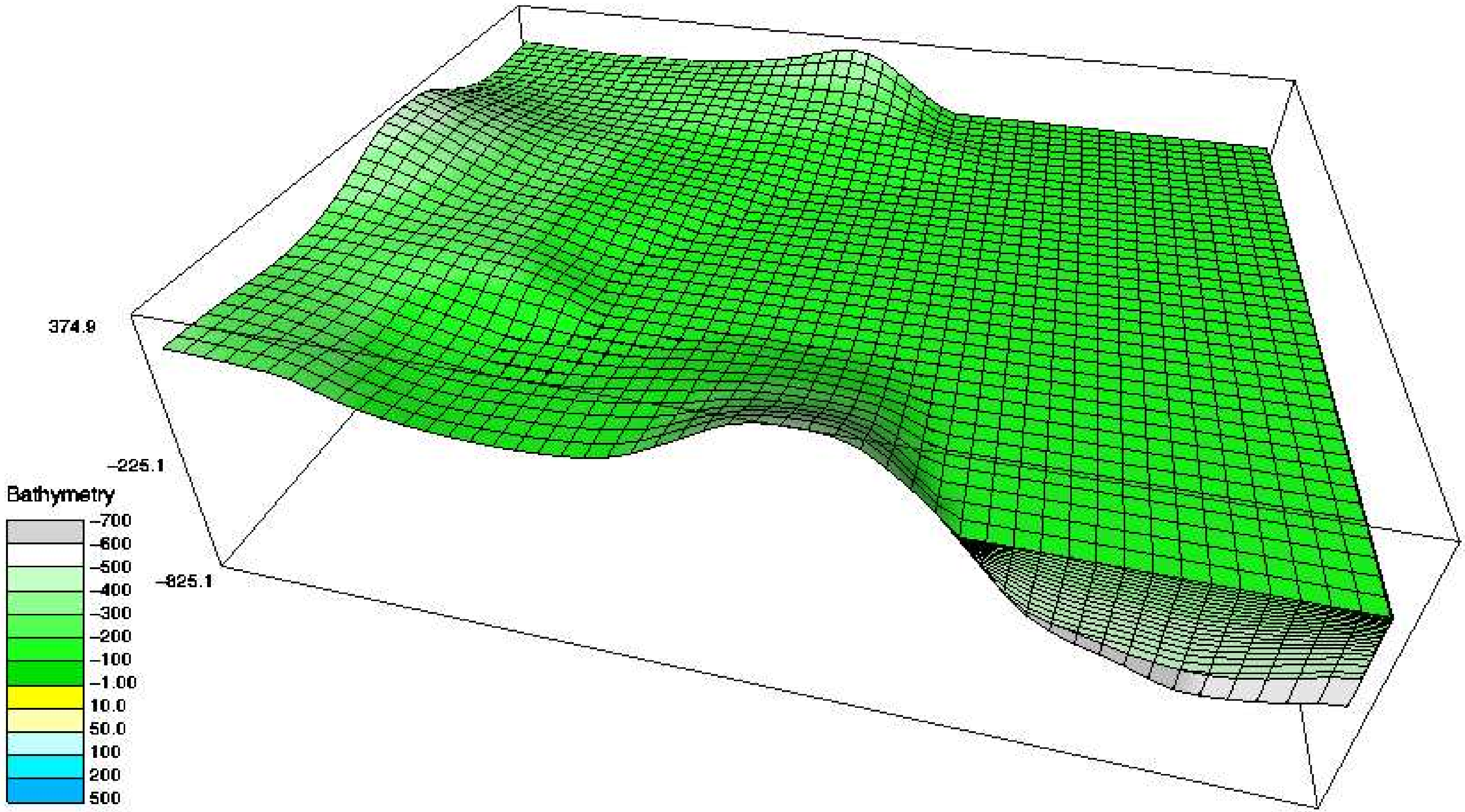
T = -240 Ma


509.4
69.4
-370.6
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

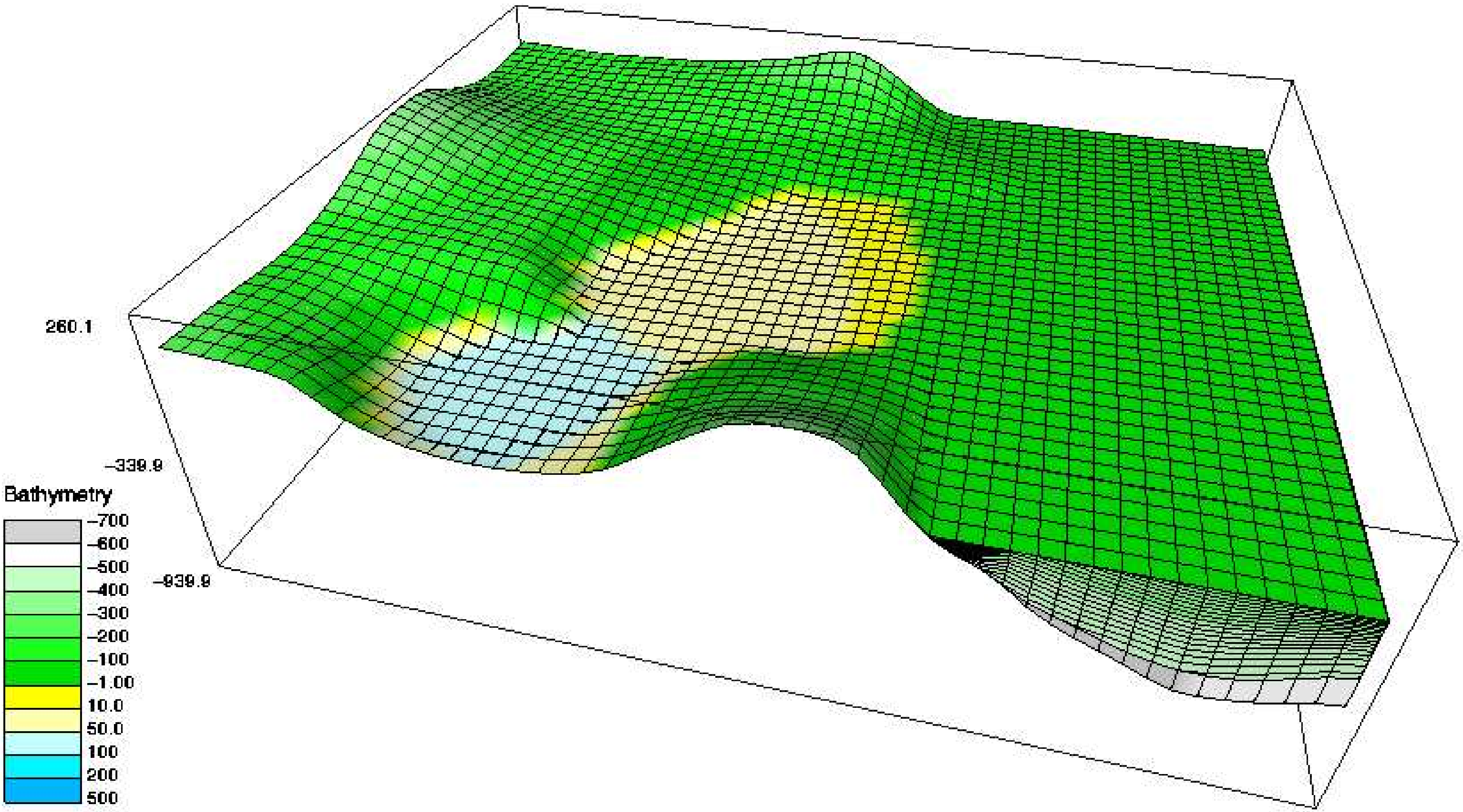
T = -235 Ma


489.7
-110.3
-710.3
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

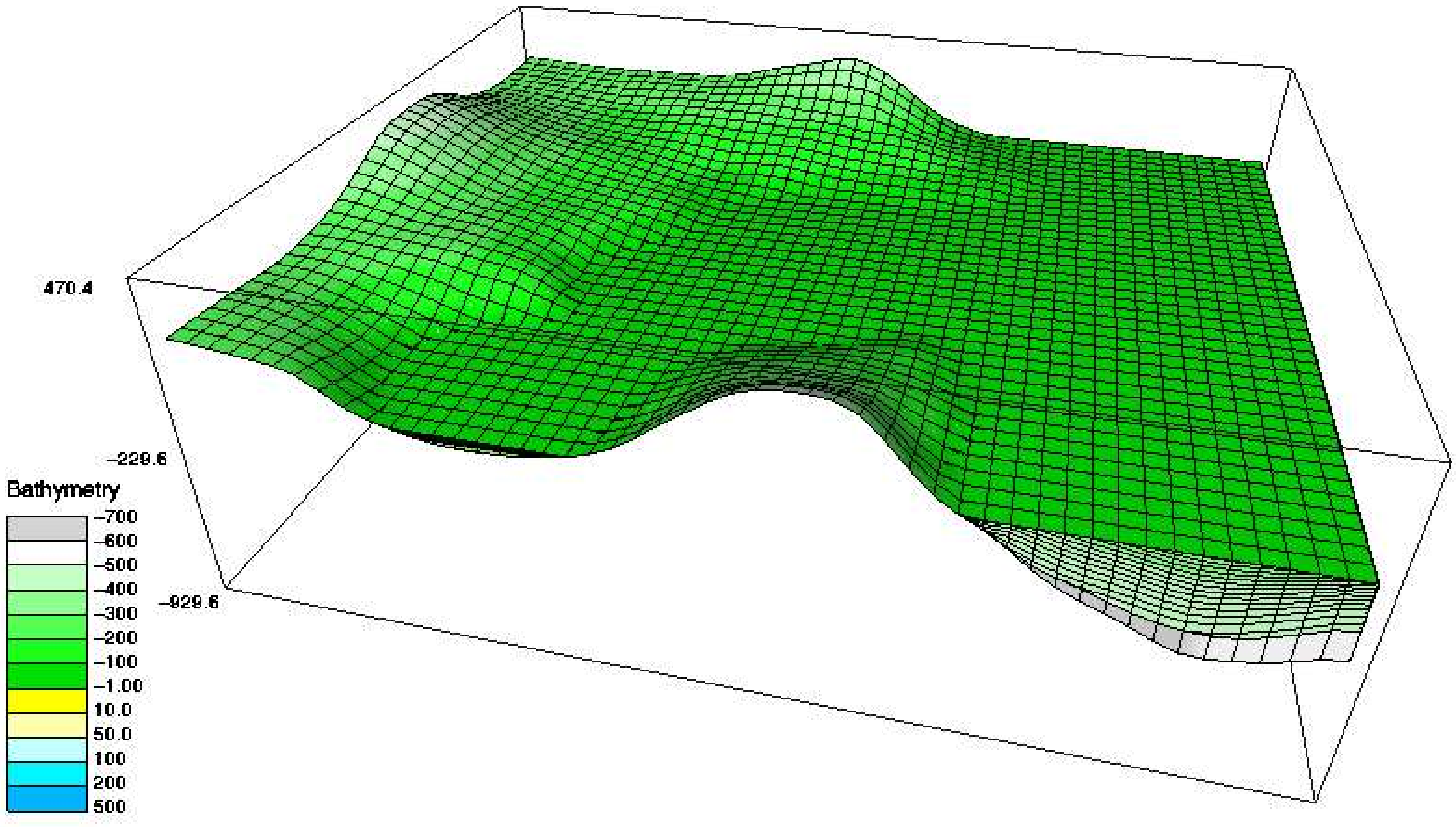
T = -230 Ma


374.9
-225.1
-825.1
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

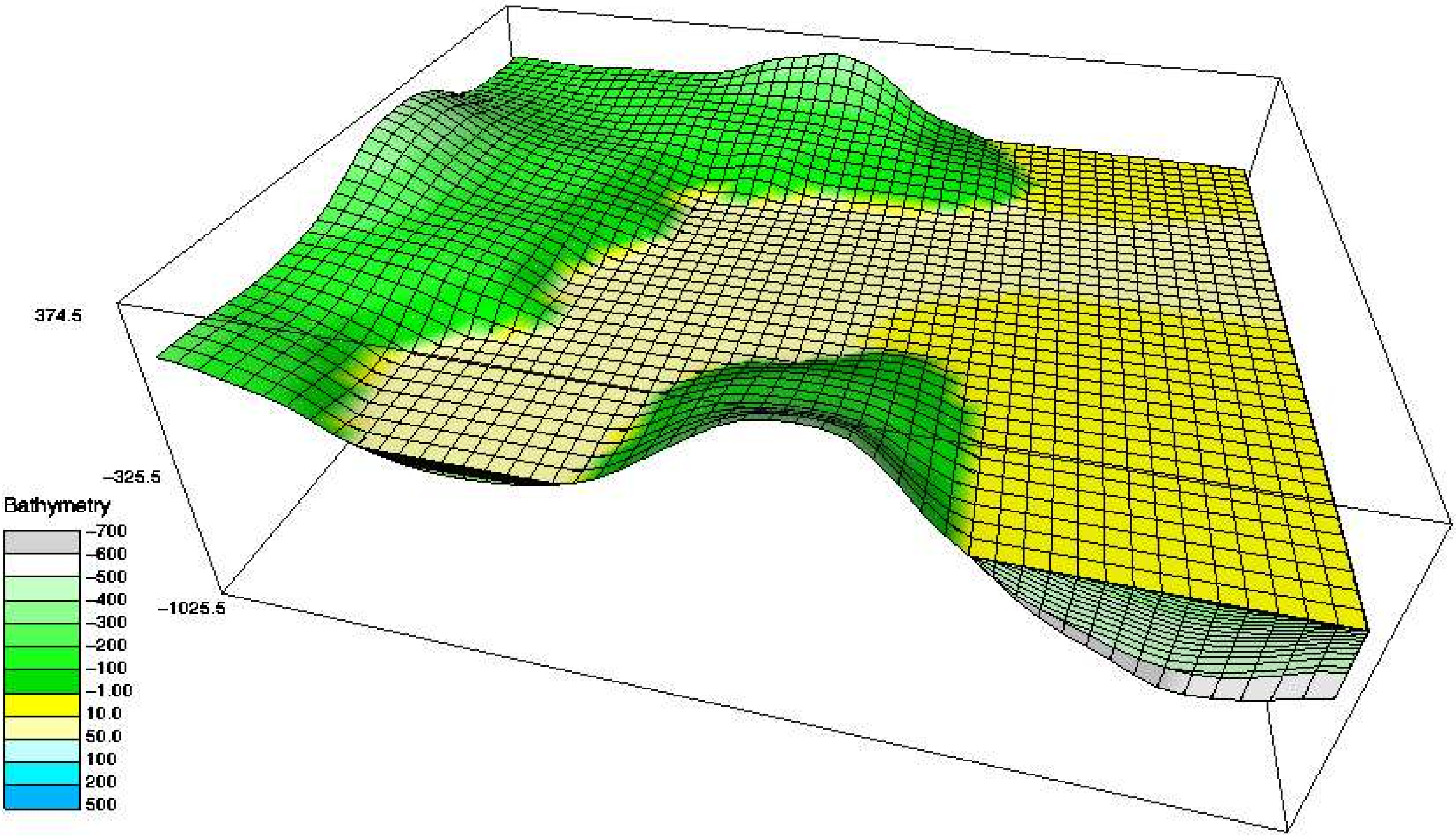
T = -225 Ma


260.1
-339.9
-939.9
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

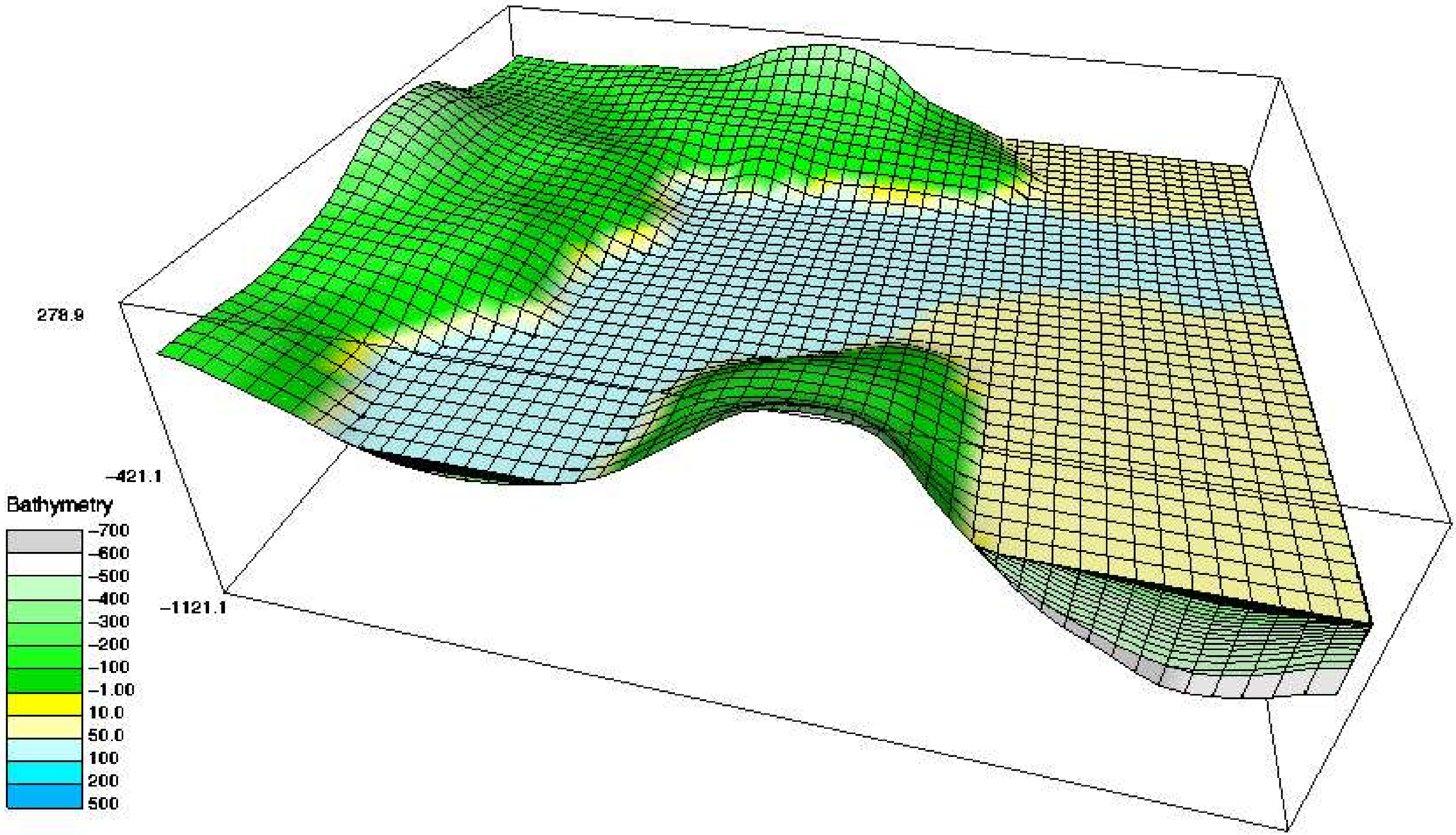
T = -220 Ma


470.4
-229.6
-929.6
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

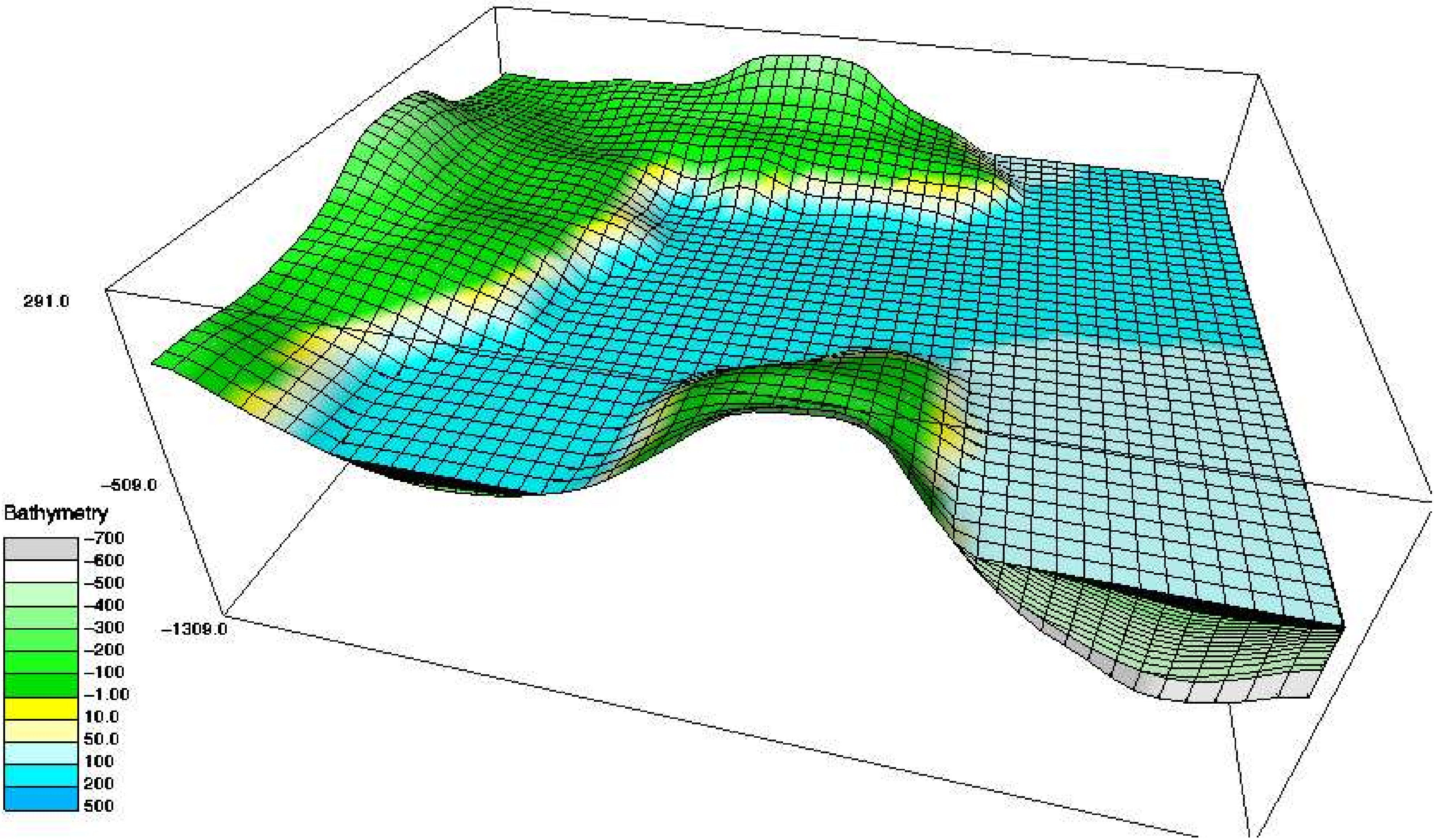
T = -215 Ma


374.5
-325.5
-1025.5
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

T = -210 Ma


278.9
-421.1
-1121.1
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

T = -205 Ma


291.0
-509.0
-1309.0
Bathymetry
-700
-600
-500
-400
-300
-200
-100
-1.00
10.0
50.0
100
200
500

Performances de la méthode de Newton

Problèmes de robustesse de la convergence de la méthode de Newton liés

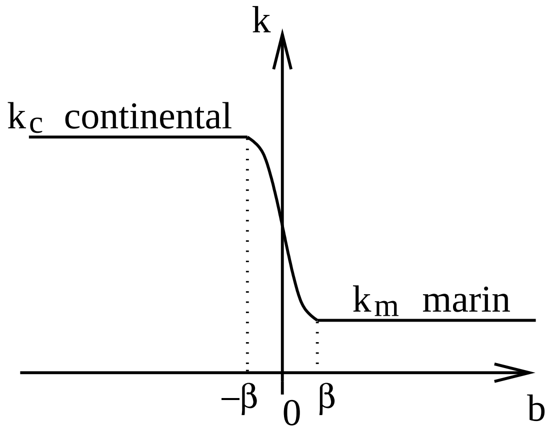
- **aux fonctions non linéaires (coefficients de diffusion),**
- **à la condition d'unilatéralité,**
- **à la particularité du terme de masse (pas de dérivée en temps des concentrations de surface).**

Stabilisation de la méthode de Newton : Traitement des non-linéarités

- **Introduction de la fonction** $\psi_i(b) = -\int_0^b k_i(u)\,du \Rightarrow \mathrm{f}_i = -\lambda\, c_i^s\, \nabla\psi_i(b)$
- **Lissage de la loi** $k_i(b)$, $i = 1, ..., L$, **sur l'intervalle** $[-\beta, \beta]$ $(\beta > 0)$

	$\beta = 0$ m	$\beta = 0.5$ m
$\Delta x = 10$ km	5.1	4.6
$\Delta x = 5$ km	5.2	4.8

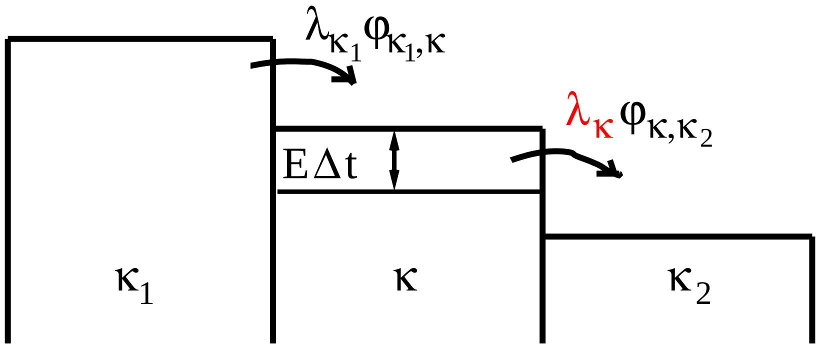
(Nombre d'itérations de Newton par pas de temps - $\Delta t = 0.1$ Ma)



- ***Cas particulier*** $k_{im} = r\, k_{ic}$: $\psi(b) = \begin{cases} b & \text{si } b < 0 \\ rb & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \psi_i(b) = k_{ic}\,\psi(b)$

Explicitation du limiteur de flux λ

<u>Idée :</u> A $(h_\kappa)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ donné, $(\lambda_\kappa)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ se calcule explicitement par tri des cellules du maillage par ordre de hauteurs h_κ décroissantes



Δt	λ implicite	λ explicite
0.5 Ma	7.4	3.9
0.1 Ma	4.8	2.7
0.02 Ma	3.5	2.2

(Nombre d'itérations de Newton par pas de temps - $\Delta x = 5$ km, $\beta = 0.5$ m.)

$\Rightarrow$ **Schéma beaucoup plus robuste et plus performant**

$\Rightarrow$ **Erreur sur les solutions généralement non négligeable**

Stratégie de préconditionnement

<u>But :</u> Résoudre le système $\mathsf{J} \cdot \mathsf{X} = \begin{pmatrix} H_1 & C_1 \\ H_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{X}_h \\ \mathsf{X}_{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{Y}_h \\ \mathsf{Y}_{c_1} \end{pmatrix}$

<u>Idée :</u> Découpler le traitement de la hauteur de celui des concentrations

1. *Découplage local : choix de l'équation en hauteur*

$$(G\,\mathsf{J}) \cdot \mathsf{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{H}_2 & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{X}_h \\ \mathsf{X}_{c_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{Z}_h \\ \mathsf{Z}_{c_1} \end{pmatrix}$$

2. *Recouplage : préconditionneur global*

$$\mathcal{P}_{BGS}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{H}}_1 & 0 \\ \mathcal{H}_2 & \tilde{\mathcal{C}}_2 \end{pmatrix}^{-1}, \qquad \mathcal{P}_G^{-1} = (\tilde{G}\mathsf{J})^{-1}$$

Découplage local

Notant $\mathbf{J}_\kappa = \begin{pmatrix} (H_1)_{\kappa\kappa} & (C_1)_{\kappa\kappa} \\ (H_2)_{\kappa\kappa} & (C_2)_{\kappa\kappa} \end{pmatrix}$, le découplage local consiste à multiplier $\mathbf{J}_\kappa$ par une matrice G_κ telle que $G_\kappa \mathbf{J}_\kappa = \begin{pmatrix} \times & \varepsilon \\ \times & \times \end{pmatrix}$.

1. **Somme des équations de conservation : $G_\kappa^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**
2. **Somme pondérée des équations de conservation : $G_\kappa^P = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**
3. **Elimination de Gauss :**

$$G_\kappa^G = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(C_1)_{\kappa\kappa}}{(C_2)_{\kappa\kappa}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } (C_2)_{\kappa\kappa} \neq 0, \quad G_\kappa^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sinon .}$$

Résultats numériques : découplage local

	# BiCGStab it./Newton		Temps solveur/Newton	
	$\mathcal{P}_G^{-1}$, $ILU(0)$	$\mathcal{P}_{BGS}^{-1}$, $ILU(1)$	$\mathcal{P}_G^{-1}$, $ILU(0)$	$\mathcal{P}_{BGS}^{-1}$, $ILU(1)$
G_κ^S	22.2	17.3	0.25s	0.20s
G_κ^P	21.9	17.5	0.25s	0.20s
G_κ^G	20.9	20.0	0.24s	0.22s

(Convergence : résidu initial réduit de 10^{-6} - $\Delta t = 0.1$ Ma, $\Delta x = 5$ km)

$\Longrightarrow$ Découplages locaux équivalents

$\Longrightarrow$ Préconditionnement par blocs plus performant qu'un préconditionnement global de la matrice

Résultats numériques : robustesse

→ Découplage local G_κ^S, choix du préconditionnement du bloc en hauteur $\tilde{\mathcal{H}}_1$

	# BiCGStab it./Newton		Temps solveur/Newton	
	LU	$ILU(1)$	LU	$ILU(1)$
Δt=0.5 Ma	9.3	30.8	0.26s	0.34s
Δt=0.1 Ma	9.9	17.3	0.27s	0.20s
Δt=0.02 Ma	10.7	13.0	0.28s	0.15s

	# BiCGStab it./Newton		Temps solveur/Newton	
	LU	$ILU(1)$	LU	$ILU(1)$
Δx=10 km	10.8	14.1	0.05s	0.04s
Δx=5 km	9.9	17.3	0.27s	0.20s
Δx=2.5 km	15.5	50.5	1.78s	2.42s

(Convergence : résidu initial réduit de 10^{-6} - Δt = 0.1 Ma, Δx = 5 km)

Préconditionnement : conclusions

- **Les découplages locaux sont équivalents.**
- **Le préconditionnement par blocs $\mathcal{P}_{BGS}^{-1}$ est plus performant que le préconditionnement global $\mathcal{P}_{G}^{-1}$.**
- **Pour le bloc en hauteur $\tilde{\mathcal{H}}_1$, le préconditionnement LU est robuste ; le préconditionnement $ILU(1)$ est de moins en moins performant lorsqu'on augmente le pas de temps et que l'on raffine le maillage.**

Conclusions et perspectives

- **Etude sur les solveurs linéaires itératifs à poursuivre ; Inexact Newton**
- **Compléter la physique du problème (flux d'eau, compaction)**
- **Problème inverse : estimation des flux, de la déformation sismique verticale et des coefficients de diffusion connaissant des données sismiques et des données de puits (voir exposé de G. Dobranszky)**

Modèle multi-lithologique sous contrainte

$$\left\{\begin{array}{rl} c_i|_{\zeta=h}\,\partial_t h + \mathrm{div}\left[-\lambda\, c_i^s\, k_i(b)\,\nabla(h+H)\right] = 0 & \text{sur } \Omega\times(0,T), \\ \sum_{i=1}^{L} c_i^s = 1 & \text{sur } \Omega\times(0,T), \\ \left.\begin{array}{r} (\partial_t h + E)(1-\lambda) = 0, \\ (\partial_t h + E) \geq 0,\ (1-\lambda) \geq 0, \end{array}\right. & \text{sur } \ \Omega\times(0,T), \\ + \text{ CI, CL} & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t c_i & = & 0 & \text{sur } \{(x,\zeta,t)\,|\,(x,t)\in\Omega\times(0,T),\ \zeta\in(0,h(x,t))\}, \\ c_i|_{\zeta=h} & = & c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+ = \{(x,t)\in\Omega\times(0,T)\,|\,\partial_t h(x,t)>0\}, \\ c_i|_{t=0} & = & c_i^0 & \text{sur } \{(x,\zeta)\,|\,x\in\Omega,\ \zeta\in(0,h^0(x))\}. \end{array}\right.$$

Algorithme de Newton

Condition d'unilatéralité $\longrightarrow$ traitée par la méthode de l'indice de phase (voir [Eymard, Gallouët, Herbin 00]) :

- $\mathcal{I} \in \{0,1\}^{\#\mathcal{K}}$ (indice de phase)
- Méthode de Newton appliquée à $\mathcal{I}$ fixé à la variable $(y,c) \in \mathbb{R}^{(L+1)\times\#\mathcal{K}}$ où

$$c = (c^s_{i,\kappa})_{i=1,\dots,L,\,\kappa\in\mathcal{K}} \text{ et } y_\kappa = \begin{cases} h_\kappa & \text{si } \mathcal{I}_\kappa = 0 \quad (\lambda_\kappa = 1), \\ \lambda_\kappa & \text{si } \mathcal{I}_\kappa = 1 \quad (h_\kappa = \tilde{\mathcal{H}}_\kappa) \end{cases} \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}.$$

- Actualisation de l'indice de phase $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}_\kappa = 0 \text{ et } h_\kappa < \tilde{\mathcal{H}}_\kappa \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_\kappa = 1,\ h_\kappa = \tilde{\mathcal{H}}_\kappa$$

$$\mathcal{I}_\kappa = 1 \text{ et } \lambda_\kappa > 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_\kappa = 0,\ \lambda_\kappa = 1$$