Analyse du Modèle Stratigraphique dans le cas découplé

R. Eymard [‡] T. Gallouët [§] V. Gervais [†]
R. Masson[†]

Journée UPPA-IFP, 18 mai 2004

[†] Institut Français du Pétrole, 1 et 4 av. de Bois Preau 92852 Rueil Malmaison Cedex
[‡] Département de Mathématiques, Université de Marne la Vallée, 5 boulevard Descartes, Champs sur Marne, F-77454, Marnes la vallée, Cedex 2.
[§] LATP, Université de Provence, 39 rue Frédéric Joliot Curie, 13453 Marseille cedex 13.

Plan

I. Rappel du modèle multi-lithologique (sans contrainte)

II. Définition mathématique du modèle multi-lithologique découplé

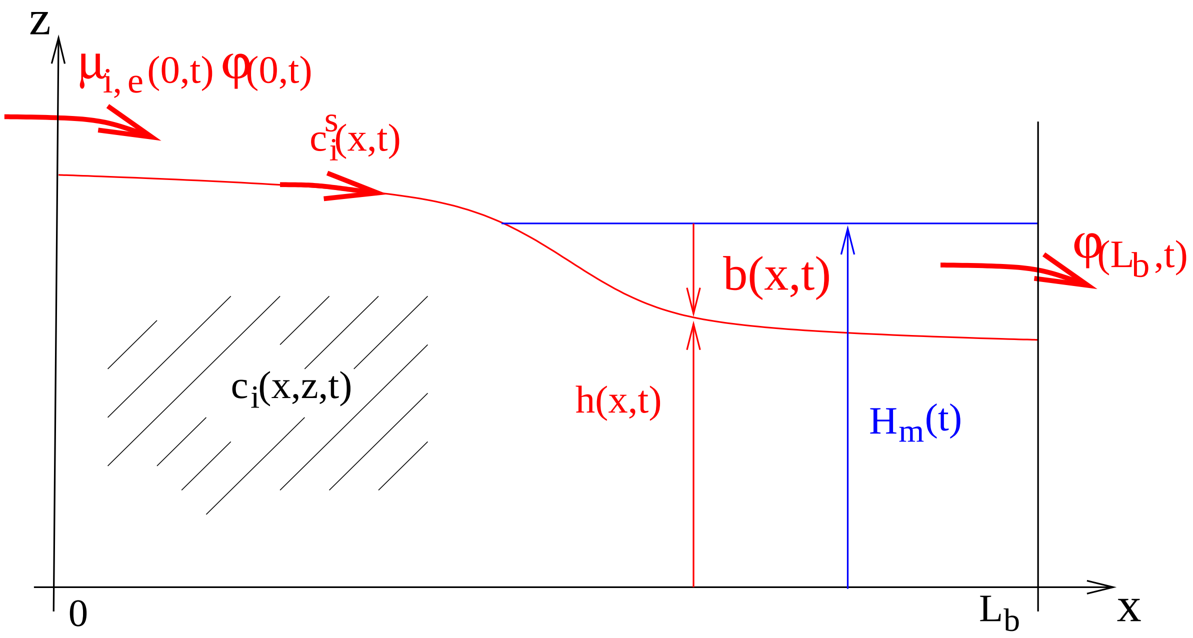
III. Preuve de l'unicité

IV. Convergence du schéma volume fini (existence)

I. Modèle

- Sédiments: L lithologies de concentrations $c_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{L} c_i = 1$
- Concentrations du bassin: $c_i(x, z, t)$
- Epaisseur de sédiments: $h(x, t)$
- Concentrations de surface: $c_i^s(x, t)$

- Conservation des fractions lithologiques: $\int_0^{h(x,t)} c_i(x, z, t)dz$
- Flux de sédiments en surface: diffusion non linéaire $\mathbf{f}_i = -c_i^s k_i(b)\nabla h$
- Conservation des lithologies à l'intérieur du bassin: $\partial_t c_i = 0$



I.Conservation des lithologies

- **Equations de conservation sur** $\Omega \times (0,T)$: pour tout $i = 1, \cdots, L$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\Big(\displaystyle\int_0^{h(x,t)} c_i(x,z,t)dz\Big) + \mathrm{div}\Big(-k_i(b)\, c_i^s \nabla h\Big) &=& 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0,T), \\ \sum_{i=1}^L c_i^s(x,t) &=& 1 \quad \text{sur } \Omega \times (0,T), \\ h|_{t=0} &=& h^0 \quad \text{sur } \Omega, \\ -\sum_{i=1}^L c_i^s k_i(b) \nabla h \cdot \mathbf{n} &=& \varphi \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ -c_i^s k_i(b) \nabla h \cdot \mathbf{n} &=& \mu_i \,\varphi \text{ sur } \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) < 0\}. \end{array}\right.$$

- **Equations de conservation dans le bassin** $z < h(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$: pour tout $i = 1, \cdots, L$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t c_i &=& 0 \quad \text{sur } \{(x,z,t) \,|\, (x,t) \in \Omega \times (0,T),\ z < h(x,t)\}, \\ c_i|_{z=h} &=& c_i^s \quad \text{sur } \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\}, \\ c_i|_{t=0} &=& c_i^0 \quad \text{sur } \{(x,z) \,|\, x \in \Omega,\ z < h^0(x)\}. \end{array}\right.$$

I.Equations de conservation des lithologies

- Calcul du terme d'accumulation

$$\begin{aligned}\partial_t\Big(\int_0^{h(x,t)} c_i(x,z,t)dz\Big) &= c_i(x,h(x,t),t)\,\partial_t h(x,t) + \int_0^{h(x,t)} \partial_t c_i(x,z,t)dz \\ &= c_i(x,h(x,t),t)\,\partial_t h(x,t)\end{aligned}$$

- Changement de coordonnées: $(y,\xi,s) = (x, h(x,t) - z, t)$.
- On note $u_i(y,\xi,s) = c_i(x,z,t)$, $\quad u_i^0(y,\xi) = c_i^0(x, h^0(x) - \xi)$
- On note $\mathcal{L} = \partial_t + \partial_\xi \partial_t h$

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{L}u_i &= 0 \ \text{ sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T) \\ u_i|_{\xi=0} &= c_i^s \ \text{ sur } \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\}, \\ u_i|_{t=0} &= u_i^0 \ \text{ sur } \Omega \times (0,+\infty).\end{aligned}\right.$$

I. Modèle Multi-Lithologique

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
u_i|_{\xi=0}\, \partial_t h + \operatorname{div}\Big(-c_i^s k_i(b)\nabla h\Big) & = & 0, & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\
\sum_{i=1}^{L} c_i^s & = & 1 & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\
h|_{t=0} & = & h^0 & \text{sur } \Omega, \\
-c_i^s k_i(b)\nabla h \cdot \mathbf{n} & = & \mu_i \varphi & \text{sur } \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) < 0\}, \\
-\sum_{i=1}^{L} c_i^s k_i(b)\nabla h \cdot \mathbf{n} & = & \varphi & \text{sur } \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) \geq 0\} \\
 & & & \\
\mathcal{L} u_i & = & 0 & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T), \\
u_i|_{\xi=0} & = & c_i^s & \text{sur } \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\}, \\
u_i|_{t=0} & = & u_i^0 & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty).
\end{array}
\right.
$$

I. Modèle découplé $k_i(b) = 1$

$$
\begin{aligned}
\partial_t h - \Delta h &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0,T), \\
h|_{t=0} &= h^0 && \text{sur } \Omega, \\
-\nabla h \cdot \mathbf{n} &= \varphi && \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T).
\end{aligned}
$$

La solution h est supposée dans $C^2(\bar{\Omega} \times [0,T])$.

$$
\begin{aligned}
u_i|_{\xi=0}\, \partial_t h + \operatorname{div}\Big(-c_i^s \nabla h\Big) &= 0, && \text{sur } \Omega \times (0,T), \\
c_i^s &= \mu_i && \text{sur } \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) < 0\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} u_i &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T), \\
u_i|_{\xi=0} &= c_i^s && \text{sur } \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\}, \\
u_i|_{t=0} &= u_i^0 && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty).
\end{aligned}
$$

II. Lemmes de traces

$$\mathcal{L} = \partial_t + \partial_\xi \partial_t h$$

Si v et $\mathcal{L}v \in L^\infty\Big[\Omega \times (0,+\infty) \times (0,T)\Big]$ alors

$$v(n_t + \partial_t h\, n_\xi)|_{\Omega\times\partial[(0,+\infty)\times(0,T)]} \in L^\infty\Big(\Omega \times \partial[(0,+\infty)\times(0,T)]\Big)$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \Big((\mathcal{L}\phi)(x,\xi,t)\, v(x,\xi,t) + (\mathcal{L}v)(x,\xi,t)\, \phi(x,\xi,t) \Big)\, dt\, d\xi\, dx \\
&\quad + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \Big(v(x,\xi,0)\, \phi(x,\xi,0) - v(x,\xi,T)\, \phi(x,\xi,T) \Big)\, d\xi\, dx \\
&\quad\quad + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, v(x,0,t)\, \phi(x,0,t)\, dt\, dx = 0.
\end{aligned}$$

pour tout $\phi \in L^1[\Omega; W^{1,1}((0,+\infty)\times(0,T))]$.

II. Lemmes de traces

Si v et $\mathrm{div}\Big(v\,\nabla h\Big) \in L^\infty(\Omega\times(0,T))$ alors

$$v\nabla h\cdot n_x|_{\partial\Omega\times(0,T)} \in L^\infty(\partial\Omega\times(0,T))$$

et

$$\int_\Omega\int_0^T \mathrm{div}(\phi\,v\,\nabla h)\,dt\,dx = \int_0^T\int_{\partial\Omega}\phi\,v\,\nabla h\cdot n_x\,dtd\sigma, \tag{1}$$

pour tout $\phi\in L^1[(0,T);W^{1,1}(\Omega)]$.

II. Définition des solutions

Trouver $u_i \in L^\infty\Big[\Omega \times (0,+\infty) \times (0,T)\Big]$ et $c_i^s \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ tels que

$$\begin{aligned} u_i|_{\xi=0}\, \partial_t h + \operatorname{div}\Big(-c_i^s \nabla h\Big) &= 0, && \text{sur } \Omega \times (0,T), \\ c_i^s &= \mu_i && \text{sur } \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) < 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, u_i &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T), \\ u_i|_{\xi=0} &= c_i^s && \text{sur } \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\}, \\ u_i|_{t=0} &= u_i^0 && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty). \end{aligned}$$

II. Théorème d'existence et d'unicité

Theorem 1: en supposant
$h \in C^2(\bar{\Omega} \times [0,T])$,
$u_i^0 \in L^\infty[\Omega \times (0,+\infty)]$,
$\mu_i \in L^\infty\Big(\{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) < 0\}\Big)$,
+ des hypothèses techniques sur les frontières des ensembles
$\{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) = 0\}$ et $\{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) = 0\}$,
alors il existe une solution

$$(u_i, c_i^s) \in L^\infty[\Omega \times (0,+\infty) \times (0,T)] \times L^\infty[\Omega \times (0,T)],$$

et u_i est unique.

III. Preuve

- **Existence:** par convergence du schéma volume fini

- **Unicité:**

- Linéarité du système

- Equation adjointe (existence par convergence du schéma VF)

- Lemmes d'intégrations par parties pour des solutions des problèmes directs et adjoints

III. Preuve de l'unicité

Soient deux solutions $(u_i^1, c^{s,1})$ et $(u_i^2, c^{s,2})$,

$$\begin{cases} u = u_i^1 - u_i^2, \\ c^s = c^{s,1} - c^{s,2} \end{cases}$$

vérifie par linéarité du système

$$\begin{aligned} u|_{\xi=0}\, \partial_t h + \operatorname{div}\Big(-c^s \nabla h\Big) &= 0, && \text{sur } \Omega \times (0,T), \\ c^s &= 0 && \text{sur } \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) < 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, u &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T), \\ u|_{\xi=0} &= c^s && \text{sur } \{(x,t) \in \Omega \times (0,T),\ \partial_t h(x,t) > 0\}, \\ u|_{t=0} &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty). \end{aligned}$$

III. Système adjoint

Trouver $w \in L^\infty\Big[\Omega \times (0,+\infty) \times (0,T)\Big]$ et $q^s \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ tels que

$$\begin{aligned}
w|_{\xi=0}\,\partial_t h - \operatorname{div}\Big(q^s \nabla h\Big) &= 0, && \text{sur } \Omega \times (0,T),\\
q^s &= 0 && \text{sur } \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, \varphi(x,t) > 0\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}\,w &= u && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T),\\
w|_{\xi=0} &= q^s && \text{sur } \{(x,t) \in \Omega \times (0,T),\ \partial_t h(x,t) < 0\},\\
w|_{t=T} &= u|_{t=T} && \text{sur } \Omega \times (0,+\infty).
\end{aligned}$$

Lemme 1: sous des hypothèses similaires à celle du Théorème 1, il existe une solution à ce système

Preuve: obtenue par convergence du schéma VF

III. Intégration par parties pour u et w

Lemme 2: pour u et w solutions des systèmes direct et adjoint (+ u à support compact) on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \Big(u(x,\xi,t)\,(\mathcal{L}w)(x,\xi,t) + (\mathcal{L}u)(x,\xi,t)\,w(x,\xi,t) \Big)\,dt\,d\xi\,dx \\ - \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \Big(u(x,\xi,T)\,w(x,\xi,T) - u(x,\xi,0)\,w(x,\xi,0) \Big)\,d\xi\,dx \\ + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\,u(x,0,t)\,w(x,0,t)\,dt\,dx = 0.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T |u|^2(x,\xi,t)\,dt\,d\xi\,dx + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} |u|^2(x,\xi,T)\,d\xi\,dx \\ = \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\,u(x,0,t)\,w(x,0,t)\,dt\,dx.\end{aligned}$$

III. Intégration par parties pour q^s et c^s

$$\int_\Omega \int_0^T c^s \Big(w|_{\xi=0}\, \partial_t h \;-\; \mathrm{div}(q^s\, \nabla h)\Big) dt\, dx = 0$$

$$+ \int_\Omega \int_0^T q^s \Big(u|_{\xi=0}\, \partial_t h - \mathrm{div}(c^s \cdot \nabla h)\Big) dt\, dx = 0$$

$$- \int_\Omega \int_0^T q^s\, c^s \Big(\partial_t h - \Delta h)\Big) dt\, dx = 0$$

$$+ \int_\Omega \int_0^T \mathrm{div}\Big(q^s\, c^s\, \nabla h\Big) dt\, dx = 0 \;(\textbf{Lemme 3})$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_\Omega \int_0^T \Big(w(x,0,t)\, c^s(x,t) \;+\; u(x,0,t)\, q^s(x,t) \;-\; c^s(x,t)\, q^s(x,t)\Big)\, \partial_t h(x,t) dt\, dx \\ &= \int_\Omega \int_0^T u(x,0,t)\, w(x,0,t)\, \partial_t h(x,t) dt\, dx. \end{aligned}$$

III. Lemme 2

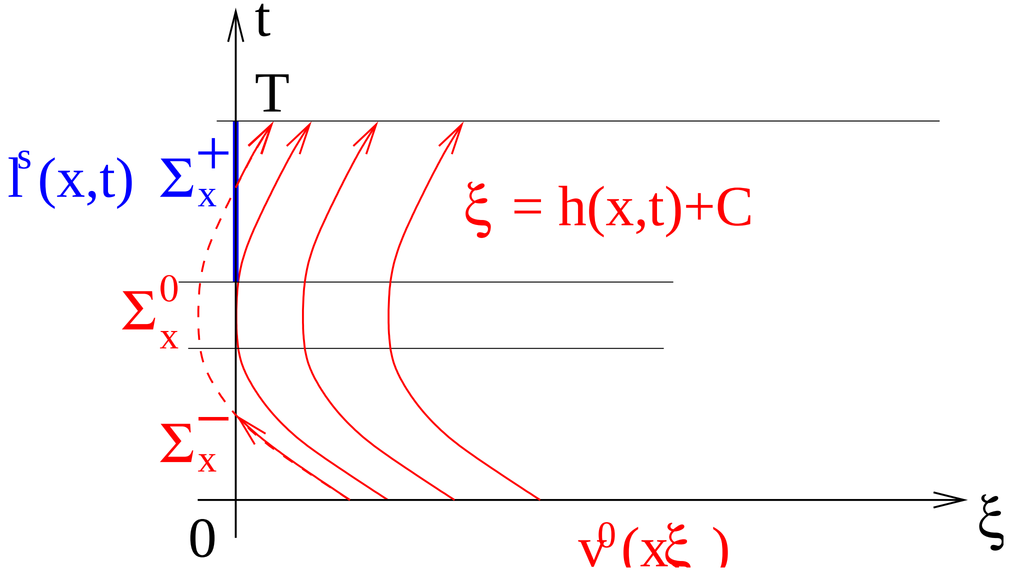
$$\Sigma^{+,-} = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T),\ \partial_t h(x,t) >, < 0\}.$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\,v = f & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T) \\ v|_{\xi=0} = l^s & \text{sur } \Sigma^+ \\ v|_{t=0} = v^0 & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} -\mathcal{L}\,w = r & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \times (0,T) \\ w|_{\xi=0} = q^s & \text{sur } \Sigma^- \\ w|_{t=T} = w^T & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \end{cases}$$

Si $f, r, l^s, q^s, v^0, w^T \in L^\infty$, et r et w^T à supports compacts, alors

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \Big(u(x,\xi,t)\,(\mathcal{L}w)(x,\xi,t) + (\mathcal{L}v)(x,\xi,t)\,w(x,\xi,t) \Big)\,dt\,d\xi\,dx$$
$$- \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \Big(v(x,\xi,T)\,w(x,\xi,T) - v(x,\xi,0)\,w(x,\xi,0) \Big)\,d\xi\,dx$$
$$+ \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\,v(x,0,t)\,w(x,0,t)\,dt\,dx = 0.$$

III. Preuve du Lemme 2: solution caractéristique

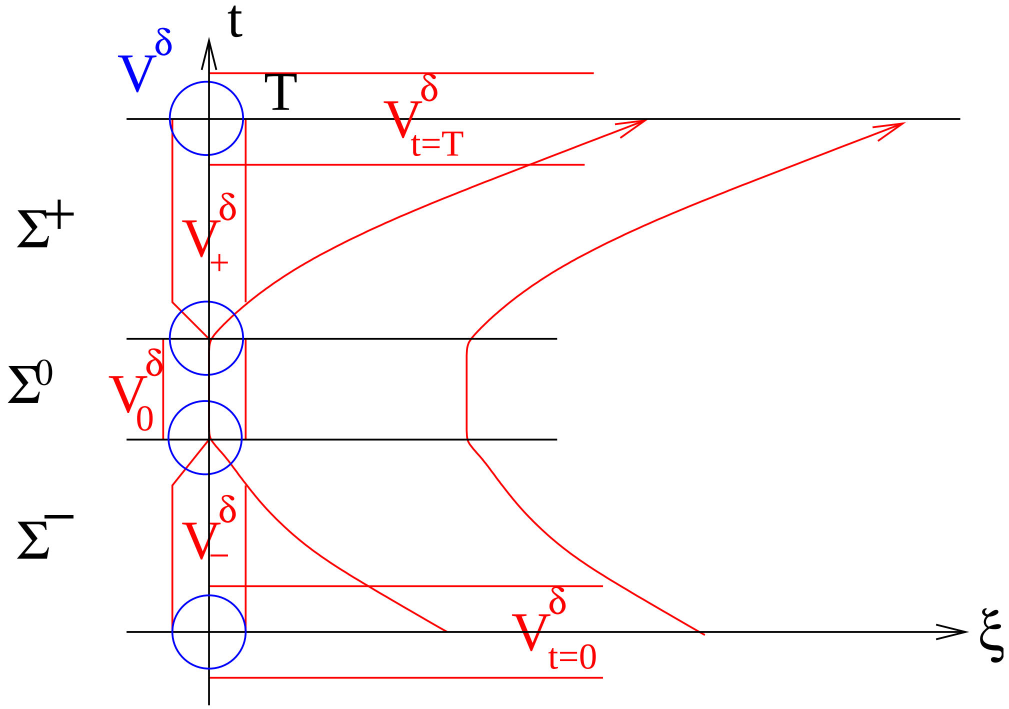


$$\zeta(s;x,\xi,t) = \int_t^s \partial_t h(x,r)\,dr + \xi = h(x,s) - h(x,t) + \xi$$

$$v(x,\xi,t) = \begin{cases} l^s(x,\tau_e(x,\xi,t)) & \text{si} \quad (x,\tau_e(x,\xi,t)) \in \Sigma^+ \\ v^0(x,\zeta(0;x,\xi,t)) & \text{si} \quad \tau_e(x,\xi,t) = 0 \end{cases} + \int_{\tau_e(x,\xi,t)}^t f(x,\zeta(s;x,\xi,t),s)\,ds,$$

- v unique solution, dépend continuement des données dans L^∞.

III. Preuve du Lemme 2



- A l'aide des caractéristiques on construit le recouvrement $V^\delta_+ \cup V^\delta_- \cup V^\delta_0 \cup V^\delta_{t=0} \cup V^\delta_{t=T} \cup V^\delta \cup V^\delta_c$ et une partition de l'unité
- Pour des données régulières: v est régulière sur $V^\delta_+ \cup V^\delta_{t=0}$ et w est régulière sur $V^\delta_- \cup V^\delta_{t=T}$.
- La contribution sur V^δ est de l'ordre de δ
- La contribution de $V^\delta_0 \cup V^\delta_c$ est nulle

III. Lemme 3

$\partial Q^{+,-} = \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\ \varphi(x,t) >, < 0\}.$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\Big(c^s \nabla h\Big) = r & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ c^s = 0 & \text{sur } \partial Q^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\Big(q^s \nabla h\Big) = s & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ q^s = 0 & \text{sur } \partial Q^+ \end{cases}$$

Si $r, s, q^s, c^s \in L^\infty$, alors

$$\int_\Omega \int_0^T \operatorname{div}\Big(q^s c^s \nabla h\Big)\, dt\, dx = 0$$

Preuve: similaire à celle du Lemme 2.

IV. Schéma Volume fini

$$\frac{h_{i,\kappa}^{n+1} - h_{i,\kappa}^{n}}{\Delta t}|\kappa| + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} |\kappa\kappa'| \frac{h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}}{d(\kappa, \kappa')} + |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, \varphi_\kappa^{n+1} = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta h_{i,\kappa}^{n+1}}{\Delta t}|\kappa| \quad &+ \quad \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} c_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1}\ |\kappa\kappa'| \frac{h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}}{d(\kappa, \kappa')} \\ &- \quad |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, \mu_{i,\kappa}^{n+1} \varphi_\kappa^{(-),n+1} + |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, c_{i,\kappa}^{s,n+1} \varphi_\kappa^{(+),n+1} = 0.\end{aligned}$$

IV. Schéma Volume fini

$c_{i,\kappa}^{n+1}$ est la solution au temps t^{n+1} de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t c_{i,\kappa}(z,t) = 0, & \text{pour } t^n < t < t^{n+1}, z < h_\kappa(t) = h_\kappa^n + (t - t^n)\frac{h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n}{\Delta t}, \\ c_{i,\kappa}(h_\kappa(t), t)) = c_{i,\kappa}^{s,n+1} & \text{si } h_\kappa^{n+1} > h_\kappa^n, \\ c_{i,\kappa}(z, t^n) = c_{i,\kappa}^n(z) & \text{pour } z < h_\kappa^n. \end{cases}$$

D'où

$$\text{Si } h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n, \quad \begin{cases} c_{i,\kappa}^{n+1}(z) = c_{i,\kappa}^n(z), \ \ z < h_\kappa^n \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(z) = c_{i,\kappa}^{s,n+1}, \ \ z \in (h_\kappa^n, h_\kappa^{n+1}) \end{cases}$$

$$\text{Sinon} \qquad c_{i,\kappa}^{n+1}(z) = c_{i,\kappa}^n(z), \ \ z < h_\kappa^{n+1}.$$

IV. Schéma Volume fini

$\Delta h_{i,\kappa}^{n+1}$ est défini par

$$\Delta h_{i,\kappa}^{n+1} = \Big(\int_0^{h_\kappa^{n+1}} c_{i,\kappa}^{n+1}(z)\, dz - \int_0^{h_\kappa^n} c_{i,\kappa}^n(z)\, dz \Big).$$

D'où

$$\Delta h_{i,\kappa}^{n+1} = \begin{cases} c_{i,\kappa}^{s,n+1}(h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n) & \text{si} \quad h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n, \\ \int_{h_\kappa^n}^{h_\kappa^{n+1}} c_{i,\kappa}^n(z) dz & \text{sinon} \end{cases}$$

IV. Théorème de convergence du schéma VF

Theorem 2:

On suppose $h \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$,
$u_i^0 \in L^\infty[\Omega \times (0, +\infty)]$, $\mu_{i,e} \in L^\infty(\Sigma_-)$,
et on considère une famille de maillages FV admissibles $\mathcal{K}_m$ du domaine Ω et de discrétisation en temps Δt_m tels que $reg(\mathcal{K}_m) \leq \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\Delta t_m \to 0$, et $\frac{\delta \mathcal{K}_m}{\sqrt{\Delta t_m}} \to 0$ lorsque $m \to \infty$.
Alors, pour toute suite de solutions $h^{(m)}(x,t) = h_\kappa^{n+1}$ pour tout $x \in \kappa$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$,
$u_i^{(m)}(x, \xi, t) = u_{i,\kappa}^{n+1}(\xi)$ pour tout $x \in \kappa$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$,
$c_i^{s,(m)}(x,t) = c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ pour tout $x \in \kappa$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$,
$h^{(m)}$ converge vers h dans $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, et $u_i^{(m)}$ (resp. $c_i^{s,(m)}$) converge à une sous suite près dans $L^\infty[\Omega \times (0, +\infty) \times (0, T)]$ (resp. $L^\infty[\Omega \times (0,T)]$) pour la topologie faible $\star$ vers une solution faible u_i (resp. c_i^s).

IV. Preuve de la convergence

- Définition d'une formulation faible

- Estimation BV faible [Eymard, Gallouët, Herbin 2000] pour la convergence des termes de flux dans l'équation sur $\Omega \times (0, T)$

- On utilise l'interpolée en temps $u_{i,\kappa}(\xi, t)$ de la solution discrète $u_{i,\kappa}^{n+1}(\xi)$ qui vérifie pour chaque maille κ la formulation faible de l'équation hyperbolique avec les données discrètes.

IV. Formulation faible

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \,|\, \phi(.,0,.) = 0$ si $\partial_t h \leq 0$, et $\phi(.,.,T) = 0$

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T (\mathcal{L}\phi)(x,\xi,t)\, u_i(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx$$
$$+ \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x,\xi)\, \phi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, c_i^s(x,t)\, \phi(x,0,t)\, dt\, dx = 0,$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \,|\, \psi(.,0,.) = 0$ si $\varphi \leq 0$, et $\psi(.,.,T) = 0$

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T (\mathcal{L}\psi)(x,\xi,t)\, u_i(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x,\xi)\, \psi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx$$
$$= \int_0^T \left(\int_\Omega c_i^s(x,t)\, \nabla h(x,t) \cdot \nabla \psi(x,0,t)\, dx + \int_{\partial\Omega} \mu_i(x,t)\, \varphi(x,t)\, \psi(x,0,t) d\gamma(x) \right) dt.$$

Conclusions

- Convergence du schéma volume fini
- Unicité de la solution (h, c_i)
- Reste à faire ...
  - Se passer de l'hypothèse sur la frontière de $\{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) = 0\}$?
  - Cas couplé $k_i \neq k_j$?

IV. Lemme: estimation BV faible [Eymard, Gallouët, Herbin]

$$\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{int} \\ \sigma = \kappa|\kappa'}} |\kappa\kappa'| \frac{|h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}|}{d(\kappa, \kappa')} |c_{i,\kappa}^{s,n+1} - c_{i,\kappa'}^{s,n+1}|$$
$$+ \sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathcal{K}} |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \, |c_{i,\kappa}^{s,n+1} - \mu_{i,\kappa}^{n+1}| \, \varphi\kappa^{(+),n+1} \leq \frac{H}{\sqrt{\delta\mathcal{K}}}.$$

Sert à la convergence des termes de flux dans l'équation sur $\Omega \times (0, T)$.