# Analyse et approximation numérique d'un modèle stratigraphique avec contrainte d'érosion

R. Eymard, T. Gallouët

Universités de Marne-la-Vallée et de Provence

# Plan

1. Modélisation
2. Un théorème d'unicité
3. Schéma de volumes finis
4. Exemples numériques

# Plan

1. Modélisation
2. Un théorème d’unicité
3. Schéma de volumes finis
4. Exemples numériques

# Modèle monolithologique

$$H_t(x,t) - \mathrm{div}[\Lambda(x)\nabla H(x,t)] = 0$$

# Modèle monolithologique

$$H_t(x,t) - \mathrm{div}[\Lambda(x)\nabla H(x,t)] = 0$$

insuffisant...

# Modèle monolithologique

$$H_t(x,t) - \mathrm{div}[\Lambda(x)\nabla H(x,t)] = 0$$

insuffisant...
contrainte d'érosion maximale

$$\begin{aligned}
&H_t(x,t) - \mathrm{div}[\Lambda(x)\lambda(x,t)\nabla H(x,t)] = 0\\
&H_t(x,t) \geq -F(x)\\
&0 \leq \lambda(x,t) \leq 1\\
&(\lambda(x,t)-1)\,(H_t(x,t)+F(x)) = 0
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ deux problèmes à étudier...

# Problèmes stationnaire et transitoire

on pose, pour $t = t_0$, $u(x) = \lambda(x, t_0)$, $g(x) = \Lambda(x)\nabla H(x, t_0)$

# Problèmes stationnaire et transitoire

on pose, pour $t = t_0$, $u(x) = \lambda(x, t_0)$, $g(x) = \Lambda(x)\nabla H(x, t_0)$

problème stationnaire

on étudie $\Gamma \; : \; g \mapsto \tilde{g}$ avec

$$
\begin{aligned}
&\tilde{g}(x) = u(x)g(x) \\
&\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x) \geq 0 \\
&0 \leq u(x) \leq 1 \\
&(u(x) - 1)\ \left(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)\right) = 0
\end{aligned}
$$

# Problèmes stationnaire et transitoire

on pose, pour $t = t_0$, $u(x) = \lambda(x, t_0)$, $g(x) = \Lambda(x)\nabla H(x, t_0)$

problème stationnaire

on étudie $\Gamma \;:\; g \mapsto \tilde{g}$ avec

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}(x) = u(x)g(x)\\
&\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x) \geq 0\\
&0 \leq u(x) \leq 1\\
&(u(x) - 1)\ \left(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)\right) = 0
\end{aligned}$$

problème transitoire

$$H_t(x, t) - \mathrm{div}[\Gamma\left(\Lambda(\cdot)\nabla H(\cdot, t)\right)(x)] = 0$$

# Hypothèses

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert régulier

$\exists h \in C^1(\overline{\Omega})$ et $\Lambda \ : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_d$ tq $g \ : \Omega \to \mathbb{R}^d$,
$x \mapsto \Lambda(x)\nabla h(x)$ Lipschitz et $g(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0$

$F \in L^\infty(\Omega)$, $F(x) \geq 0$ pp.

Remarque : $g = 0$ et $F = 0 \Rightarrow$ non unicité de $u$, mais unicité de $\tilde{g}$

# Non régularité a priori

on cherche sens faible : soit $\xi \in C^1(\mathbb{R})$ tq $\xi'(1) \geq 0$

on a alors

$$\begin{aligned}
\xi'(u(x))(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) &= \\
\xi'(1)(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) + & \\
(\xi'(u(x)) - \xi'(1))(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) &= \\
\xi'(1)(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) &\geq 0
\end{aligned}$$

forme faible de $\xi'(u(x))(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) \geq 0$ pp.

# Solutions faibles

$\tilde{g} = ug$ solution faible si
$u \in L^\infty(\Omega)$ et $0 \leq u(x) \leq 1$ pp.
et

$$\int_\Omega \left[ \begin{array}{l} \xi(u(x))(-g(x)\cdot\nabla\varphi(x)) + \\ \left[\xi'(u(x))u(x) - \xi(u(x))\right]\varphi(x)\mathrm{div}g(x) + \\ \xi'(u(x))\varphi(x)F(x) \end{array} \right] \mathrm{d}x \qquad \geq 0$$

$\forall \xi \in C^1(\mathbb{R})$ convexe tq. $\xi'(1) \geq 0,\ \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+).$

( $\xi'(u(x))(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) \geq 0$ multiplié par $\varphi$...)

# Propriété des solutions faibles

$$\int_\Omega (-\tilde{g}(x) \cdot \nabla\varphi(x)\mathrm{d}x + F(x)\varphi(x))\mathrm{d}x \geq 0,\ \forall\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$$

si $\tilde{g}$ Lipschitz, solution faible ssi

$\tilde{g}(x) = u(x)g(x)$ pp. et $0 \leq u(x) \leq 1$ pp.
$\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x) \geq 0$ pp.
$(u(x) - 1)\ \ (\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) = 0$ pp.

# Cas particulier 1D

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a < b$, $F \in L^\infty(]a,b[)$, $g \in C^0([a,b])$ Lipschitz avec $g(a) = g(b) = 0$
solution faible $\tilde{g}\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie $\forall x \in [a,b]$

$$\tilde{g}(x) = \min_{y \in [x,b]} \left( g^+(y) + \int_x^y F(t)dt \right) - \min_{y \in [a,x]} \left( g^-(y) + \int_y^x F(t)dt \right)$$

# Cas particulier 1D

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a < b$, $F \in L^\infty(]a,b[)$, $g \in C^0([a,b])$ Lipschitz
avec $g(a) = g(b) = 0$
solution faible $\tilde{g}\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie $\forall x \in [a,b]$

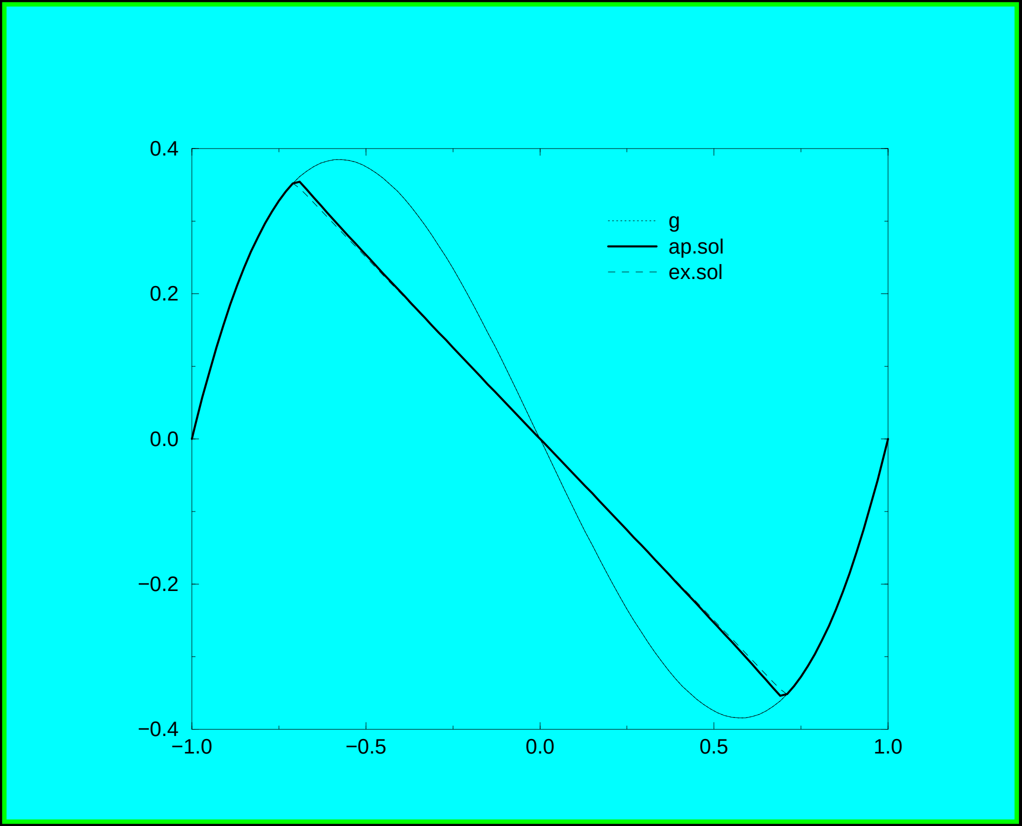
$$\tilde{g}(x) = \min_{y\in[x,b]} \left( g^+(y) + \int_x^y F(t)dt \right) - \min_{y\in[a,x]} \left( g^-(y) + \int_y^x F(t)dt \right)$$

Preuve : si $g(x) > 0$ et $\tilde{g}(x) < g(x)$, il existe $y_0 \in ]x,b]$ et $\varepsilon > 0$ tq

$$\tilde{g}(x') = g^+(y_0) + \int_{x'}^{y_0} F(t)dt,\ \forall x' \in [x, x+\varepsilon[$$

# Exemple 1D

$\Omega = ]-1, 1[$, $g : x \mapsto x^3 - x$ et $F : x \mapsto 1/2$



# Plan

1. Modélisation
2. Un théorème d'unicité
3. Schéma de volumes finis
4. Exemples numériques

# Méthode

1. définir un ensemble de fonctions $\mathcal{C}(g, F)$, auquel appartient la solution faible
2. affaiblir encore le sens de la solution... en prévision convergence minimale sol. approchées...
3. montrer que la solution très faible est plus grande que tous les éléments de $\mathcal{C}(g, F)$
4. en déduire solution très faible est en fait faible et maximale
5. en déduire unicité ... et conjecture

# Un ensemble convexe de fonctions

$\mathcal{C}(g,F) = \{\gamma$ tq $\exists v \in L^\infty(\Omega)$, avec $\gamma(x) = v(x)g(x)$,
$0 \le v(x) \le 1$ pp. et $\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$,
$\int_\Omega \left([-\gamma(x)\cdot\nabla\varphi(x)] + \varphi(x)F(x)\right)\mathrm{d}x \ge 0\}$

caractérisé par

$\mathcal{C}(g,F) = \{\gamma$ tq $\exists v \in L^\infty(\Omega)$, avec $\gamma(x) = v(x)g(x)$,
$0 \le v(x) \le 1$ pp. et sens faible de
$\xi'(u(x))(\mathrm{div}[u(x)g(x)] + F(x)) \ge 0$ avec
$\forall \kappa \in [0,1],\ \xi'(\kappa) \ge 0\}$

$$\int_\Omega \left( \begin{array}{ll} \xi(v(x))[-g(x)\cdot\nabla\varphi(x)] & + \\ \left[\xi'(v(x))v(x) - \xi(v(x))\right]\varphi(x)\,\mathrm{div} g(x) & + \\ \xi'(v(x))\varphi(x)F(x) & \end{array} \right)\mathrm{d}x \quad \ge 0,$$

$\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+),\ \forall \xi \in C^1(\mathbb{R})$ tq. $\forall \kappa \in [0,1],\ \xi'(\kappa) \ge 0$

# Solution très faible

$\hat{g} = ug$ pp., avec $u \in L^\infty(\Omega \times (0,1))$, $0 \leq u(x,\alpha) \leq 1$ pp $(x,\alpha) \in \Omega \times (0,1)$ et sens faible de $\xi'(u(x,\alpha))(\mathrm{div}[u(x,\alpha)g(x)] + F(x)) \geq 0$ avec $\xi \in C^1(\mathbb{R})$, convexe tq. $\xi'(1) \geq 0$

$$\int_\Omega \int_0^1 \left[ \begin{array}{l} \xi(u(x,\alpha))(-g(x)\cdot\nabla\varphi(x)) + \\ \left[\xi'(u(x,\alpha))u(x,\alpha) - \xi(u(x,\alpha))\right]\varphi(x)\mathrm{div}g(x) + \\ \xi'(u(x,\alpha))\varphi(x)F(x) \end{array} \right] \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x \geq 0$$

$\forall \xi \in C^1(\mathbb{R})$, convexe tq. $\xi'(1) \geq 0$, $\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$

(sol. mesure d'Young vue comme “processus”)

# Théorème de comparaison

$\gamma \in \mathcal{C}(g, F)$ avec $\gamma(x) = v(x)g(x)$
$\hat{g}$ sol. très faible, avec $\hat{g}(x, \alpha) = u(x, \alpha)g(x)$
alors

$$\int_\Omega \int_0^1 (v(x) - u(x, \alpha))^+ \left[-g(x) \cdot \nabla\varphi(x)\right] \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}x \geq 0,$$
$$\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+).$$

preuve : méthode du dédoublement de variable (Krushkov)
utilise $g$ Lipschitz

# Conséquence : unicité

on prend $\gamma(x) = \int_0^1 \hat{g}(x,\alpha)\mathrm{d}\alpha \in \mathcal{C}(g,F)$
et $\varphi = h - h_{\min}$, on obtient

$$-\int_\Omega \int_0^1 \left( \int_0^1 u(x,\beta)\mathrm{d}\beta - u(x,\alpha) \right)^+ \Lambda(x)\nabla h(x).\nabla h(x)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}x \geq 0$$

implique $\tilde{g}(x,\alpha)$ indép. de $\alpha$, puis unique

# Conséquence : solution maximale

$$\tilde{g}(x) = \max_{\gamma \in \mathcal{C}(g,F)} \frac{|\gamma(x)|}{|g(x)|} g(x)$$

implique

$\tilde{g}$ est la projection dans $L^2(\Omega)^d$ de $g$ sur $\mathcal{C}(g, F)$

(convexe fermé non vide car $O \in \mathcal{C}(g, F)$)

conjecture : résultat vrai quelle que soit régularité de $g$...

# Plan

1. Modélisation
2. Un théorème d'unicité
3. Schéma de volumes finis
4. Exemples numériques

# Schéma numérique 1

$\mathcal{T}$ maillage admissible $\Omega$, $g_{\mathcal{T}} := (g_{K,L})_{K\in\mathcal{T},L\in\mathcal{N}_K}$ tq $g_{K,L} = -g_{L,K}$ et

$$\sum_{L\in\mathcal{N}_K} g_{K,L} = \int_K \mathrm{div} g(x)\mathrm{d}x := G_K,\ \forall K \in \mathcal{T}$$

tel que $g_{K,L}$ approche $\bar{g}_{K,L} = \int_{K|L} g(x)\cdot\mathbf{n}_{K,L}\mathrm{d}s(x)$, avec

$$\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \frac{\mathrm{diam}(K)}{m_{KL}} \left(g_{K,L} - \bar{g}_{K,L}\right)^2 \to 0$$

et $F_K = \int_K F(x)\mathrm{d}x$

# (exemples de $g_{K,L}$)

1. $g_{K,L} = \bar{g}_{K,L} = \int_{K|L} g(x) \cdot \mathbf{n}_{K,L} \mathrm{d}s(x)$

2. $\sum_{L \in \mathcal{N}_K} g_{K,L} = \int_K \mathrm{div} g(x) \mathrm{d}x$

avec $g_{K,L} = \tau_{KL}(h_L - h_K)$

(méthode de volumes finis : E-Gallouët, MH. Vignal)

3. $\sum_{L \in \mathcal{N}_K} g_{K,L} = \int_K \mathrm{div} g(x) \mathrm{d}x$

(et éléments finis mixtes : Raviart, Thomas, Chavent, Jaffré, Droniou-E-Hilhorst-Zhou)

# Schéma numérique 2

schéma donné par

$$\sum_{L \in \mathcal{N}_K} (g^+_{K,L} u_L - g^-_{K,L} u_K) + F_K = 0 \quad \text{et} \quad u_K \leq 1 \quad \text{ou}$$
$$\sum_{L \in \mathcal{N}_K} (g^+_{K,L} u_L - g^-_{K,L} u_K) + F_K \geq 0 \quad \text{et} \quad u_K = 1$$
$$u_{\mathcal{T}}(x) = u_K, \ \forall x \in K, \ \forall K \in \mathcal{T}$$

# Algorithme numérique

**Initialisation:** $u_K^{(0)} = 1$ et $p_K^{(0)} = 1$, pour tout $K \in \mathcal{T}$

**Itérations:** pour $u_K^{(n-1)}$ et $p_K^{(n-1)}$ connus pour tout $K \in \mathcal{T}$

1.

si $\displaystyle\sum_{L \in \mathcal{N}_K} (g_{K,L}^+ u_L^{(n-1)} - g_{K,L}^- u_K^{(n-1)}) + F_K < 0,$ alors $p_K^{(n)} = 0$

si $\displaystyle\sum_{L \in \mathcal{N}_K} (g_{K,L}^+ u_L^{(n-1)} - g_{K,L}^- u_K^{(n-1)}) + F_K \geq 0,$ alors $p_K^{(n)} = p_K^{(n-1)}$

2.

si $p_K^{(n)} = 1,$ alors $u_K^{(n)} = 1$

si $p_K^{(n)} = 0,$ alors $\displaystyle\sum_{L \in \mathcal{N}_K} (g_{K,L}^+ u_L^{(n)} - g_{K,L}^- u_K^{(n)}) + F_K = 0$

# Propriétés de l'algorithme

1. existe unique solution $(p_K^{(n)}, u_K^{(n)})$
2. suite $(u_K^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
3. $u_K^{(n)} \geq 0$
4. convergence en au plus card($\mathcal{T}$) itérations

# Convergence du schéma

estimation $L^\infty$ implique sous-suite cv non-lin. faible $*$ : il existe fonction $\hat{u} \in L^\infty(\Omega \times ]0,1[)$ tq

pour tout $\psi \in C^0(\mathbb{R})$, $\psi(u_\mathcal{T})$ cv $\int_0^1 \psi(\hat{u}(\cdot,\alpha))\mathrm{d}\alpha$ topologie faible $*$ de $L^\infty(\Omega)$

inégalité BV-faible

$$\sum_{(K,L)\in\mathcal{E}} |g_{K,L}|\,|u_K - u_L| \leq \frac{C}{|\mathcal{T}|^{1/2}}$$

conséquence : passage à la limite schéma$\times$fonction test donne $\hat{u}g$ solution très faible

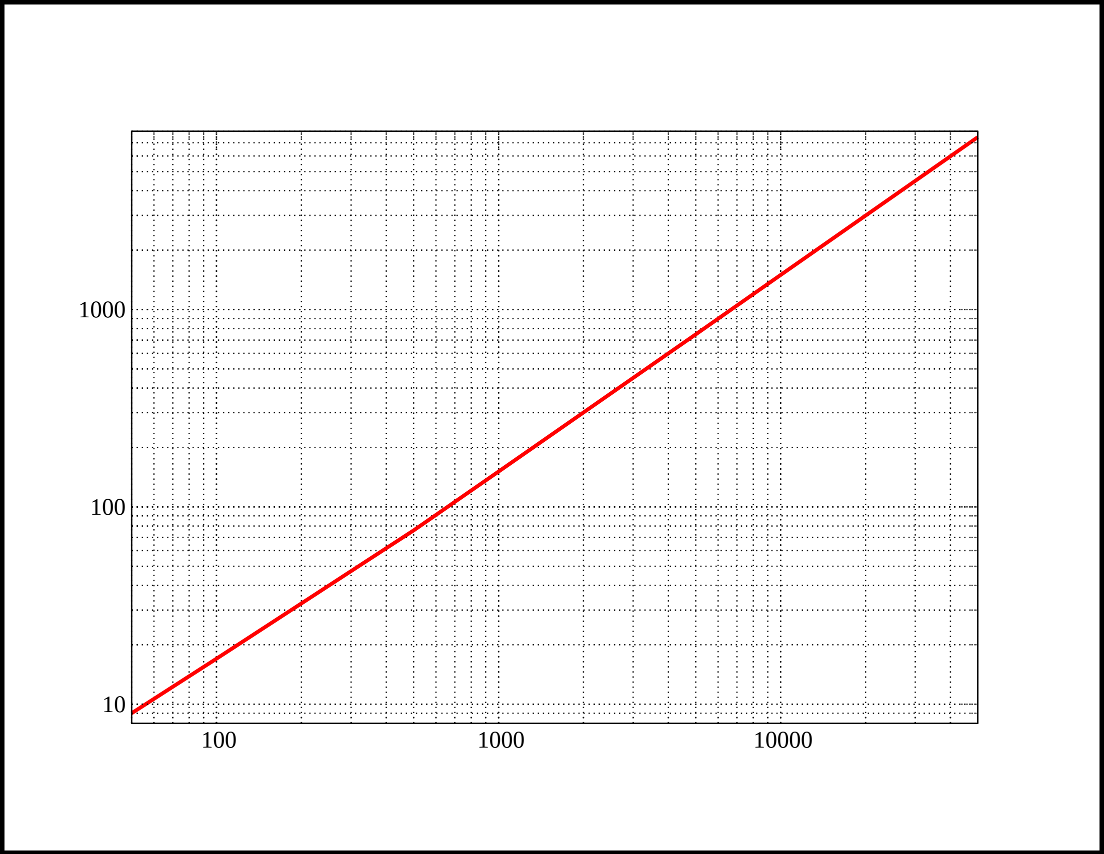
unicité solution très faible implique solution faible et convergence forte dans $L^p(\Omega)$ pour $p \geq 1$

# Plan

1. Modélisation
2. Un théorème d’unicité
3. Schéma de volumes finis
4. Exemples numériques

# Propriétés de convergence, exemple 1

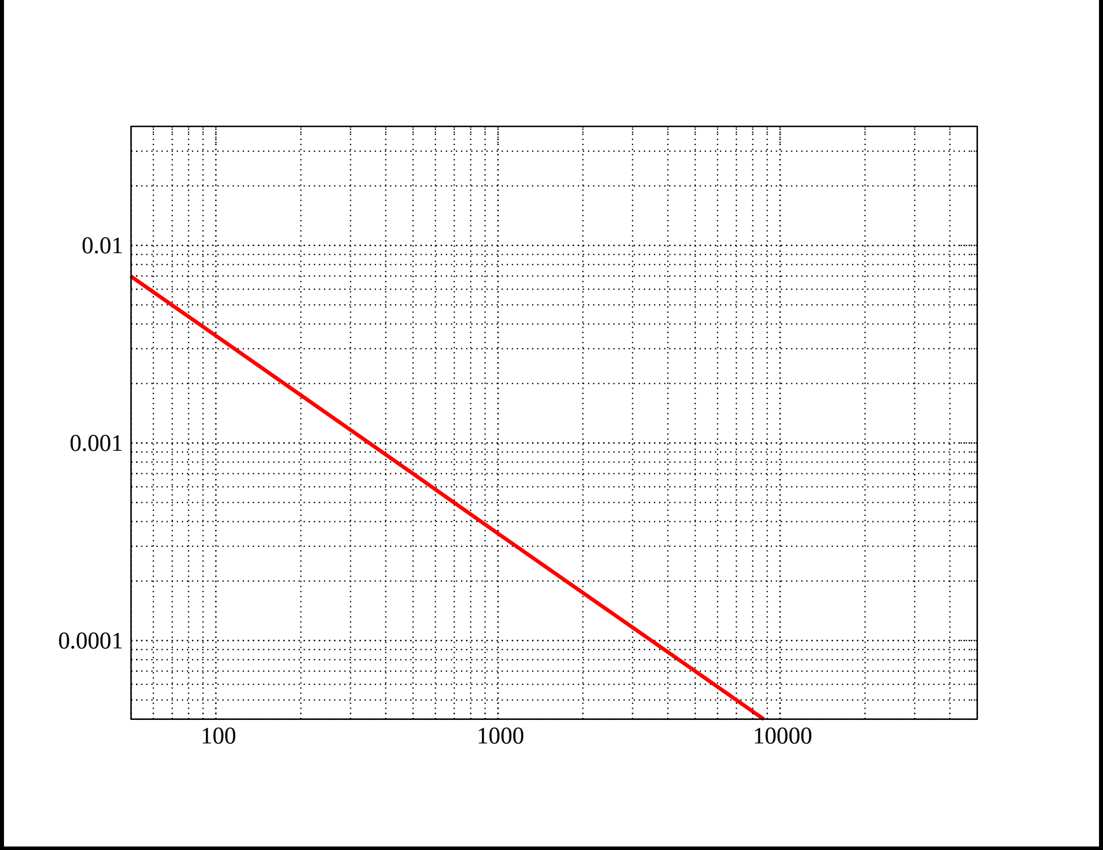
$\Omega = ]-1,1[$, $g \; : \; x \mapsto x^3 - x$ et $F \; : \; x \mapsto 1/2$




Nombre d'itérations fonction du nombre de mailles

# Propriétés de convergence, exemple 1

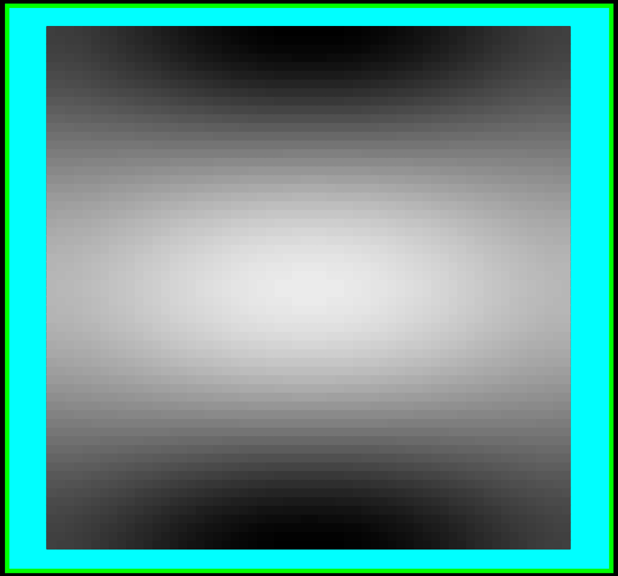
$\Omega = ]-1,1[$, $g \ : \ x \mapsto x^3 - x$ et $F \ : \ x \mapsto 1/2$




Norme $L^1$ de l'erreur fonction du nombre de mailles

# Exemple 2D

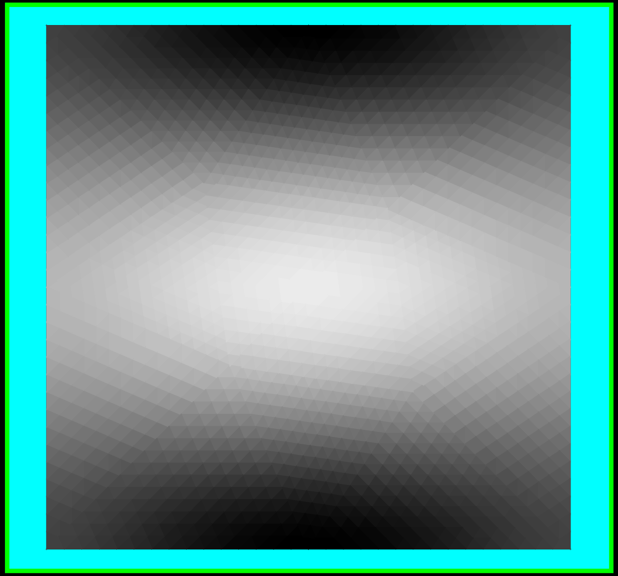
$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2+x-1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $h$ sur des carrés

# Exemple 2D

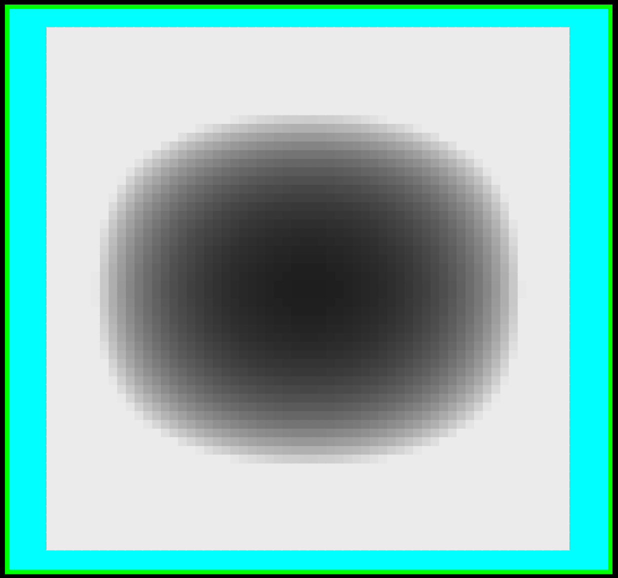
$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2+x-1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $h$ sur des triangles

# Exemple 2D

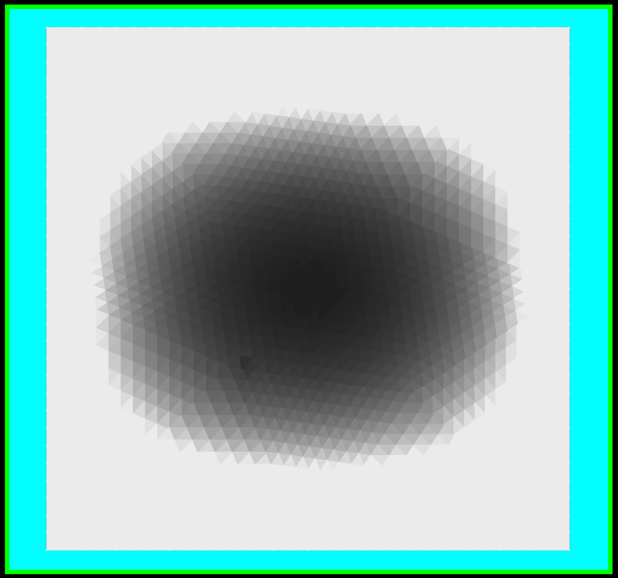
$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2 + x - 1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $u$ sur des carrés

# Exemple 2D

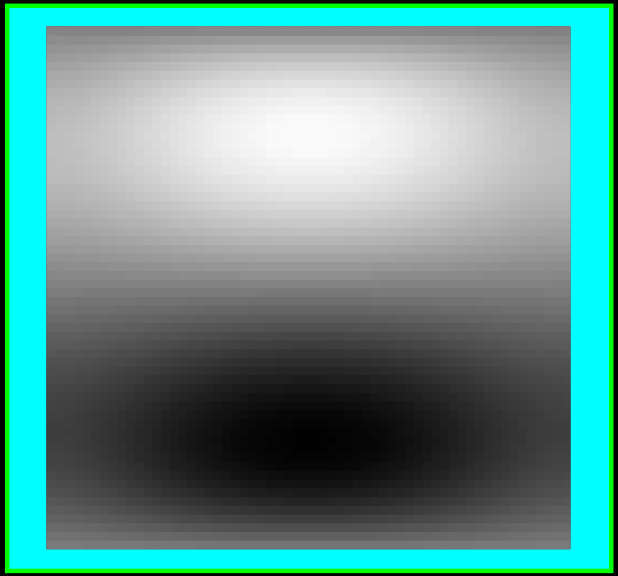
$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2+x-1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $u$ sur des triangles

# Exemple 2D

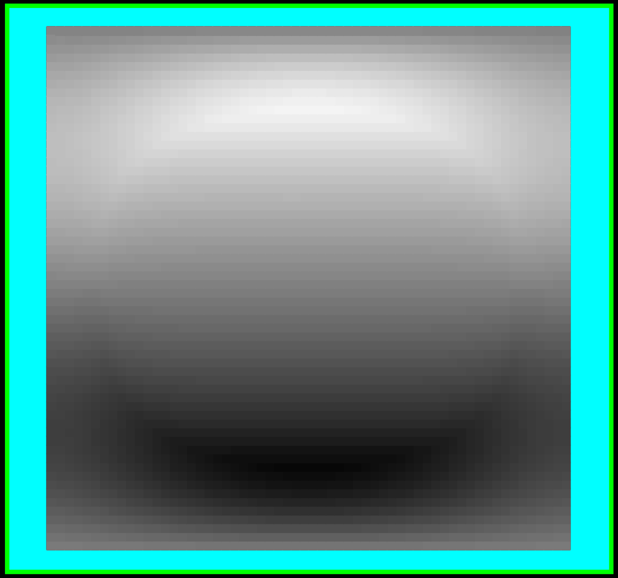
$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2+x-1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $g \cdot \mathbf{e}_1$ sur des carrés

# Exemple 2D

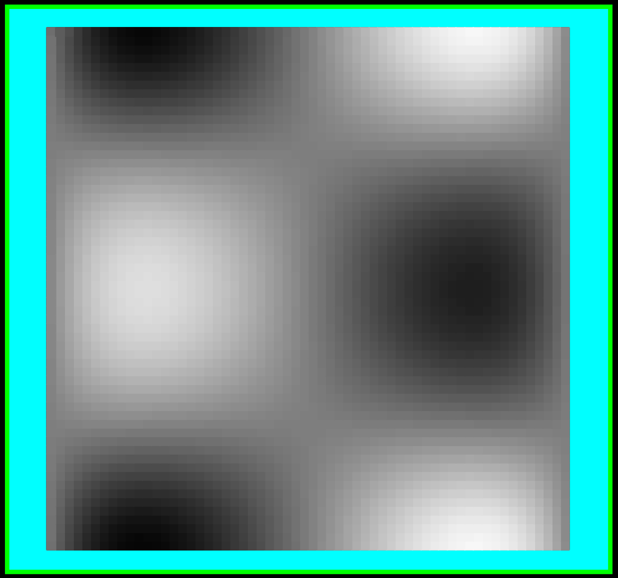
$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2+x-1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $\tilde{g} \cdot \mathbf{e}_1$ sur des carrés

# Exemple 2D

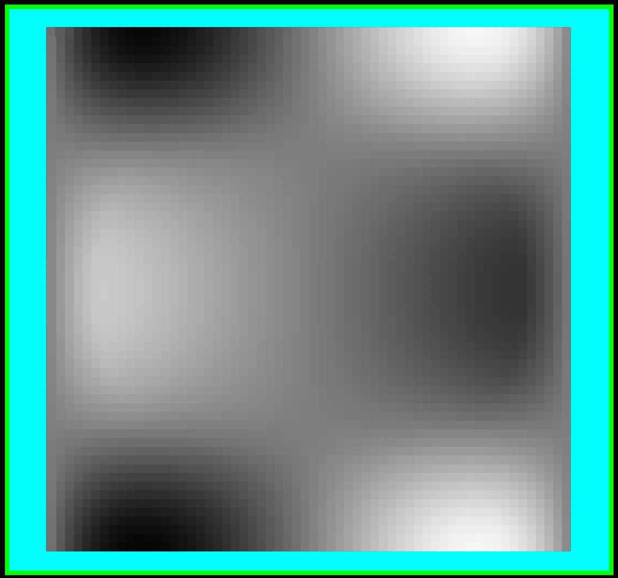
$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2+x-1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $g \cdot \mathbf{e}_2$ sur des carrés

# Exemple 2D

$\Omega = (0,1)^2$, $\Lambda(x) = \mathrm{I}_d$ et $F(x) = 1/100$ pp, $g = \nabla h$ avec $h$ solution de $-\Delta h(x,y) = y(1-y)(-x^2+x-1/6)$, et $\nabla h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$



Calcul de $\tilde{g} \cdot \mathbf{e}_2$ sur des carrés

# Conclusions

beaucoup de problèmes ouverts : régularité de $g$, projection $L^2$, cas transitoire ....

un problème d'avenir...