

Calcul numérique précis de dérivées fractionnaires

François Dubois^{1 2}

Département de Mathématiques
et de leurs Applications

Université de Pau et des Pays de l'Adour, 01 juin 2010

Collaboration avec
Régis Msallam, Stéphanie Mengué,
Ana Cristina Galucio-Bourdet, Jean-François Deü.

¹ Conservatoire National des Arts et Métiers (Paris)

² Chercheur associé, équipe Analyse Numérique et EDP, Orsay

Plan de l'exposé

- 1) Introduction
- 2) Racines carrées formelles
- 3) Collocation mixte
- 4) Tests numériques
- 5) Un modèle non linéaire de flamme
- 6) Equation de la chaleur et intégration d'ordre un-demi
- 7) Modèle couplé en mécanique des fluides
- 8) En guise de conclusion

Dérivée d'ordre un-demi

- Fonction **causale** $u(\bullet)$, *i.e.* nulle sur $] -\infty, 0]$:

$$u(t) \equiv 0 \quad \text{si } t \leq 0$$

- $\Phi : \mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (v, t) \mapsto \Phi(v, t) \in \mathbb{R}$
fonction assez régulière
- Opérateur de “**dérivation d'ordre un-demi**” :
opérateur de convolution défini par

$$(D^{1/2} u)(t) = \int_0^t \frac{du}{ds} \frac{ds}{\sqrt{\pi(t-s)}} . \quad (1)$$

(Caputo (1967), voir aussi Lighthill (1978))

- On cherche à approcher numériquement la (?) solution
de l'équation semi-différentielle

$$\begin{cases} (D^{1/2} u)(t) & = \Phi(u(t), t), & t > 0 \\ u & = 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Dérivée d'ordre un-demi (ii)

- **Systeme dynamique**

piloté par l'équation semi-différentielle (2).

La connaissance de l'ensemble du passé de l'instant t permet de connaître le futur.

- Différences finies : pas de temps $h > 0$

$$t^k = k h, \quad u^k \approx u(t^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- La dérivée d'ordre un demi est la

racine carrée de la dérivée usuelle.

Quand on itère deux fois la dérivée d'ordre un demi, on trouve la dérivée usuelle.

$$\left(D^{1/2}(D^{1/2} u) \right)(t) \equiv \frac{du}{dt}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Extraction de racines carrées d'opérateurs

- Fonction causale $u(\bullet)$ approchée par des valeurs u^k
aux points de grille t^k
- Schéma aux différences finies décentré amont $(D^- u)^k$
précis au premier ordre en espace :

$$(D^- u)^k = \frac{1}{h} (u^k - u^{k-1}). \quad (4)$$

- Schéma de Gear (1971) $(D^{--} u)^k$ à trois points vers le passé,
précis au **second ordre** en espace :

$$(D^{--} u)^k = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2} u^k - 2 u^{k-1} + \frac{1}{2} u^{k-2} \right). \quad (5)$$

- Utiliser la relation (3) pour approcher l'expression $D^{1/2} u(t^k)$
par un schéma aux différences finies $(\Delta^{1/2} u)^k$ de la forme :

$$(\Delta^{1/2} u)^k \equiv \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{j=0}^k \alpha_j u^{k-j} \quad (6)$$

Extraction de racines carrées d'opérateurs (ii)

- Chercher les coefficients $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de façon à satisfaire un analogue discret de la relation (3) :

$$\left(\Delta^{1/2} (\Delta^{1/2} u) \right) (t^k) \equiv D u^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

avec D l'un des deux opérateurs aux différences D^- et D^{--} .

$$\begin{cases} D^- &= \frac{1}{h} (\text{Id} - \delta^-) \\ D^{--} &= \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2} \text{Id} - 2\delta^- + \frac{1}{2} (\delta^-)^2 \right), \end{cases}$$

$$\text{et} \quad (\delta^- u)^k \equiv u^{k-1}.$$

- Les opérateurs discrets

$$(\Delta^{1/2} u)^k \equiv \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{j=0}^k \alpha_j^- u^{k-j}, \quad (\Delta^{1/2} u)^k \equiv \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{j=0}^k \alpha_j^{--} u^{k-j}$$

sont égaux aux racines carrées formelles des relations (4) et (5).

Extraction de racines carrées d'opérateurs (iii)

Deux opérateurs discrets pour la dérivée d'ordre un-demi

- Schéma de [Grünwald](#) (1867) et [Letnikov](#) (1868)

$$\Delta^{1/2-} = \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{(\text{Id} - \delta^-)} \quad (7)$$

- Schéma " G^α " de [Lubich](#) (1986) et [Galucio et al](#) (2006)

$$\Delta^{1/2--} = \sqrt{\frac{3}{2h}} \sqrt{\left(\text{Id} - \frac{4}{3}\delta^- + \frac{1}{3}(\delta^-)^2\right)} \quad (8)$$

$$(G^{1/2})^n \equiv \sqrt{\frac{1}{\Delta t}} \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} u^{n-j}$$

- La dérivée d'ordre fractionnaire
est un opérateur de convolution

Extraction de racines carrées d'opérateurs (iv)

- Calcul des coefficients avec un logiciel de calcul formel

j	g_j
0	1
1	$-2/3$
2	$-1/18$
3	$-1/27$
4	$-17/648$
5	$-19/972$
6	$-59/3888$
7	$-71/5832$
8	$-2807/279936$
9	$-10627/1259712$
10	$-109159/15116544$

Extraction de racines carrées d'opérateurs (v)

- Algorithme de résolution

Le calcul numérique de l'étape numéro j demande de résoudre une équation d'inconnue u^j de la forme

$$\alpha_0 u^j - \Phi(u^j, j \Delta t) = \rho^j$$

où ρ^j est une fonction donnée des variables $u^0 = 0, u^1, \dots, u^{j-1}$.

- Schémas implicites.

On reprend le problème autrement

- The letter β , $0 < \beta < 1$, is a real number,
 $\Gamma(\bullet)$ is the classical Euler function.
- Fractional differential operator $D^\beta(\bullet)$:

$$(D^\beta u)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{(t-\theta)^{1-\beta}} . \quad (9)$$

- Fractional ordinary differential equation of order β :

$$\begin{cases} D^\beta (u - u_0) & = \Phi(u(t), t), & t > 0 \\ u - u_0 & = 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Discrétisation

- Discretization step $h > 0$.
- Discrete space P_1^h :
continuous functions that are
affine in each mesh element $]jh, (j+1)h[$.
- Discrete space Q_0^h : constant functions in each element.
- Fractional integrator I^β of order β :

$$I^\beta (v(\bullet), t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \theta)^{\beta-1} v(\theta) d\theta . \quad (11)$$

Collocation mixte

- Integrate the equation (10)

with the fractional integrator I^β (11) :

$$u(t) - u_0 = I^\beta (\Phi(u(\bullet), t)), \quad t \geq 0. \quad (12)$$

- Low order (P_1Q_0) mixed collocation method : choose
 a discrete state $u^h(\bullet)$ satisfying $u^h \in P_1^h$
 a flux $f^h \simeq \Phi(u(\bullet), t)$ according to the condition $f^h \in Q_0^h$.
- Write the equation (12) at the grid points jh ($j \in \mathbb{N}$) :

$$u^h(jh) - u_0 = I^\beta (f^h(\bullet), jh), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Collocation mixte (ii)

- Mean value of the **approached flux** $f^h(\bullet)$:
equal to the mean value of the **exact flux** in each element :

$$\int_{jh}^{(j+1)h} f^h(\theta) \, d\theta \equiv \int_{jh}^{(j+1)h} \Phi(u^h(\theta), \theta) \, d\theta. \quad (14)$$

- "Projection step" on the discrete space Q_0^h :

$$f_{j+\frac{1}{2}}^h = \int_0^1 \Phi(u_j^h(1-\theta) + \theta u_{j+1}^h, jh + \theta h) \, d\theta, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Collocation mixte (iii)

- "State-flux constraint" for the scheme P_1Q_0 :
the relations (13)(15) take the form

$$u_{j+1}^h - \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} f_{j+\frac{1}{2}}^h = u_0 + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{j-k} f_{k+\frac{1}{2}}^h, \quad (16)$$

$$\text{with } j \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \equiv (k+1)^\beta - k^\beta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Newton method for the numerical solution of eqs. (15) (16) ;
"Semidif" software,
see [http : //www.laas.fr/gt-opd/](http://www.laas.fr/gt-opd/) (free of charge !).

Premiers tests numériques

- Elementary tests with $\beta = 0.5$ and
Dynamics $\Phi(u, t) \equiv g(t)$ with $g(\bullet)$ chosen as :

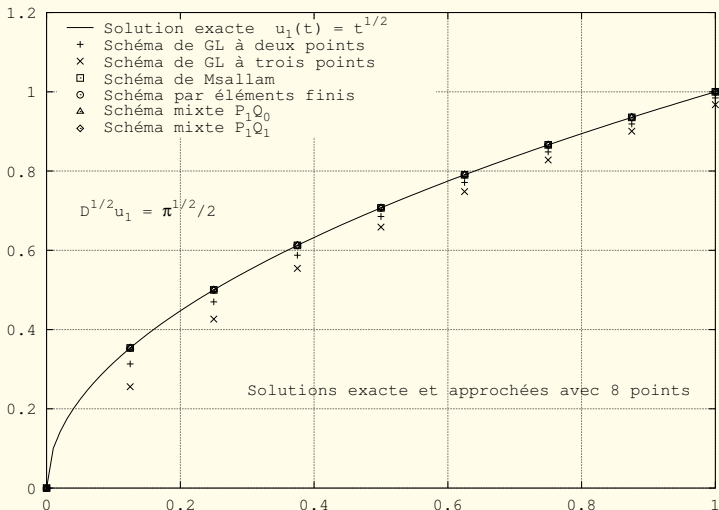
$$\begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, & g_2(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}, & g_3(t) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} t, \\ g_4(t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t \sqrt{t}, & g_5(t) = \frac{15}{16} \sqrt{\pi} t^2. \end{cases} \quad (17)$$

- Then the solution of equation (10) is simply

$$u_j(t) \equiv (\sqrt{t})^j, \quad j = 1, \dots, 5. \quad (18)$$

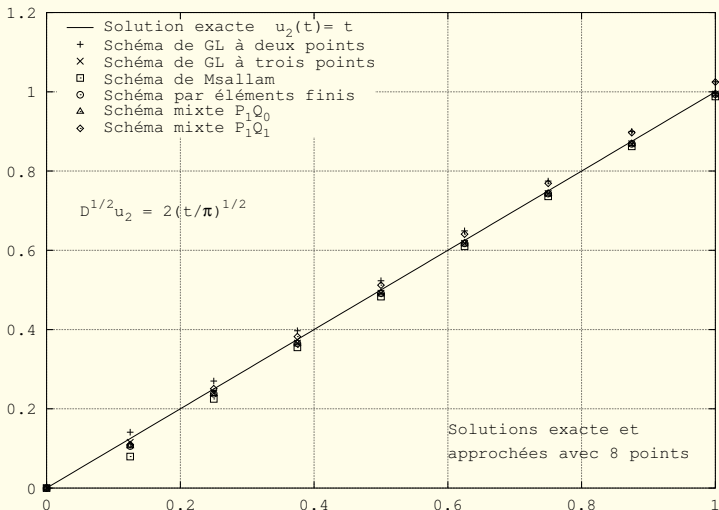
as shown on the following figures.

Premiers tests numériques (ii)



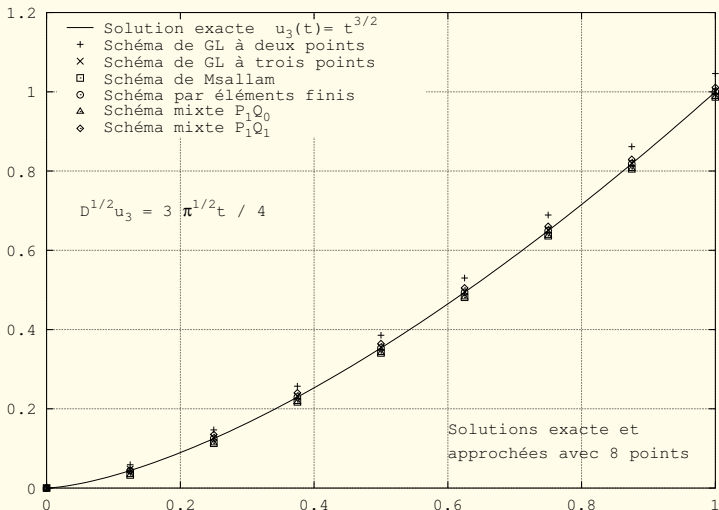
Numerical solution of $D^{1/2}u = g_1(t)$; $u(t) = \sqrt{t}$.

Premiers tests numériques (iii)



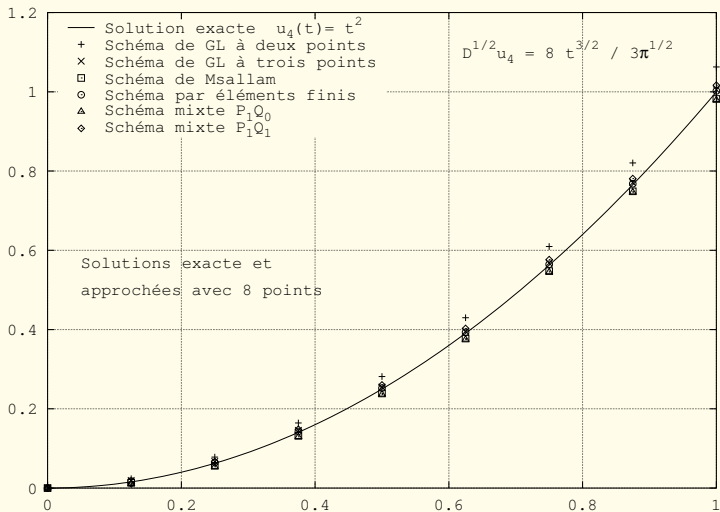
Numerical solution of $D^{1/2}u = g_2(t)$; $u(t) = t$.

Premiers tests numériques (iv)



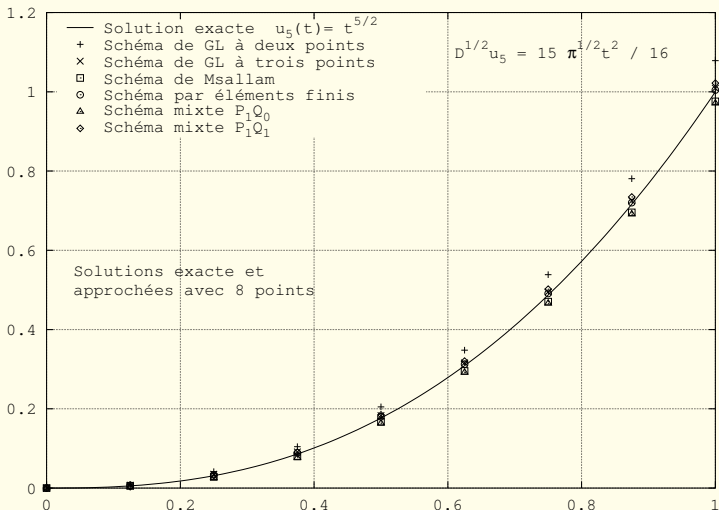
Numerical solution of $D^{1/2}u = g_3(t)$; $u(t) = t\sqrt{t}$.

Premiers tests numériques (v)



Numerical solution of $D^{1/2}u = g_4(t)$; $u(t) = t^2$.

Premiers tests numériques (vi)



Numerical solution of $D^{1/2}u = g_5(t)$; $u(t) = t^2 \sqrt{t}$.

Premiers tests numériques (vii)

- Orders of convergente with mesh steps h ,

$$h = \frac{1}{2^n}, \quad 3 \leq n \leq 13.$$
- Errors e_2^n relatively to the norm L^2 and e_∞^n for the norm L^∞ :

$$e_2^n \equiv \sqrt{h} \sqrt{\frac{|u(0) - u_0|^2}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \left| u\left(\frac{j}{2^n}\right) - u_j \right|^2 + \frac{|u(1) - u_{2^n}|^2}{2}}. \quad (19)$$

$$e_\infty^n \equiv \max\{|u(jh) - u^j|, \quad j = 0, \dots, 2^n\} \quad (20)$$

Premiers tests numériques (viii)

- Orders of convergence for the previous test case :

Mixed scheme $P_1 Q_0$

	L^∞	L^2
$g_1(t)$	∞	∞
$g_2(t)$	1.0000	1.3982
$g_3(t)$	1.4850	1.4677
$g_4(t)$	1.4722	1.4627
$g_5(t)$	1.4613	1.4564

- Satisfying results ?

Premiers tests numériques (ix)

- Tests with $\beta = 0.5$
and nonlinear dynamics $\Phi(u, t) \equiv f(u) :$

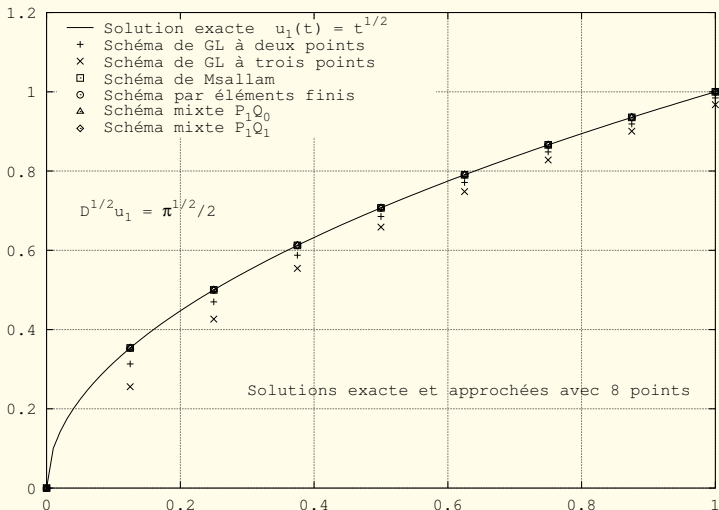
$$\begin{cases} f_1(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, & f_2(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{u}, & f_3(u) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} u^{\frac{2}{3}}, \\ f_4(u) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} u^{\frac{3}{4}}, & f_5(t) = \frac{15}{16} \sqrt{\pi} u^{\frac{4}{5}}. \end{cases} \quad (21)$$

- Then the solution of equation (10) is simply

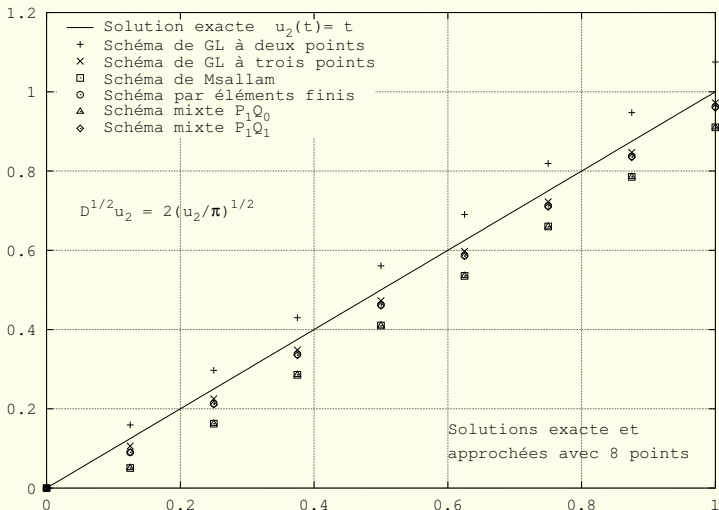
$$u_j(t) \equiv (\sqrt{t})^j, \quad j = 1, \dots, 5. \quad (22)$$

as in the five previous test cases.

Premiers tests numériques (x)

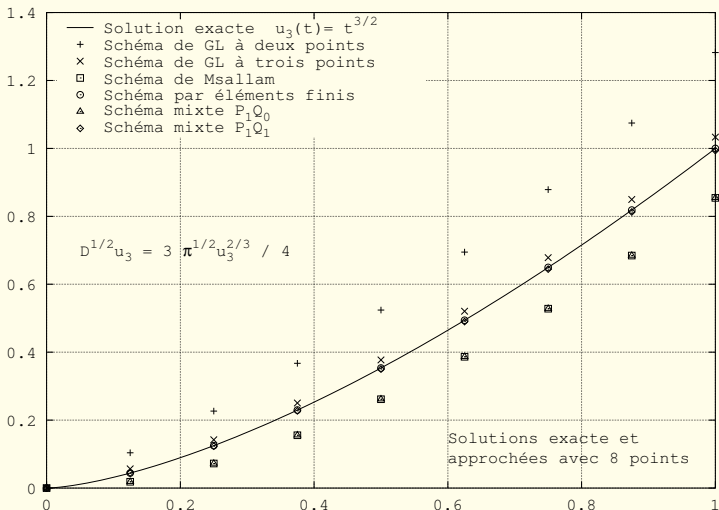


Numerical solution of $D^{1/2}u = f_1(u)$; $u(t) = \sqrt{t}$.

Premiers tests numériques (x_i)

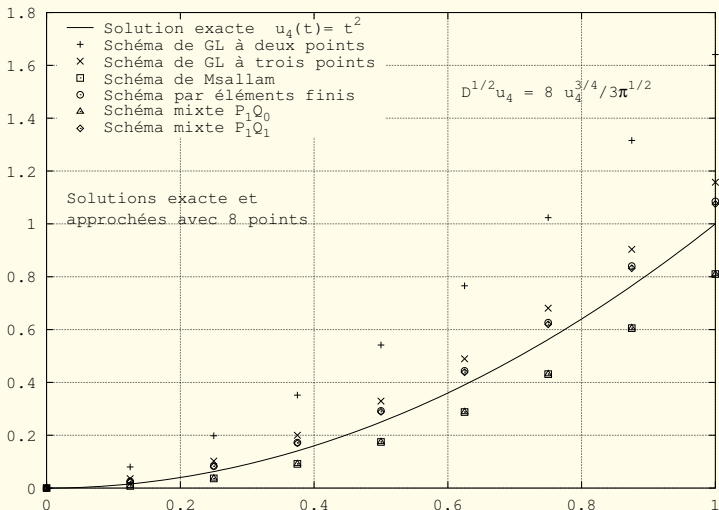
Numerical solution of $D^{1/2}u = f_2(u)$; $u(t) = t$.

Premiers tests numériques (xii)



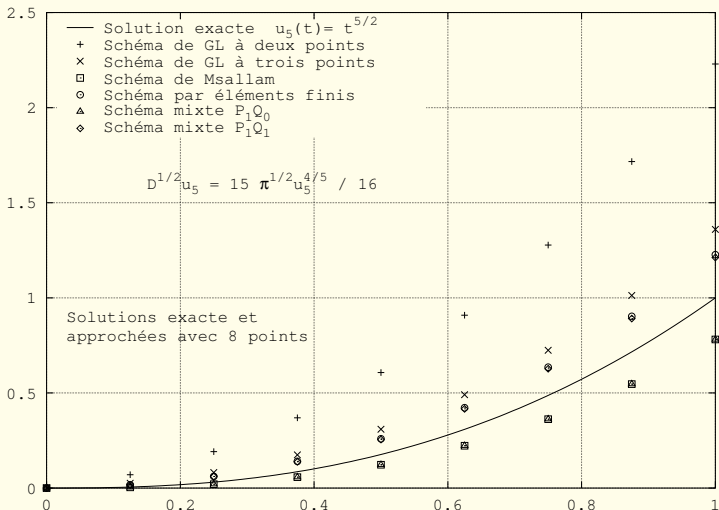
Numerical solution of $D^{1/2}u = f_3(u)$; $u(t) = t\sqrt{t}$.

Premiers tests numériques (xiii)



Numerical solution of $D^{1/2}u = f_4(u)$; $u(t) = t^2$.

Premiers tests numériques (xiv)



Numerical solution of $D^{1/2}u = f_5(u)$; $u(t) = t^2 \sqrt{t}$.

Premiers tests numériques (xv)

- Orders of convergence with mesh steps $h = \frac{1}{2^n}$, $3 \leq n \leq 13$.
- Errors e_2^n relatively to the norm L^2 and e_∞^n for the norm L^∞ :
the mixed collocation scheme is convergent,
the order of accuracy is equal to 1.
- Satisfying scheme ?

Premiers tests numériques (xvi)

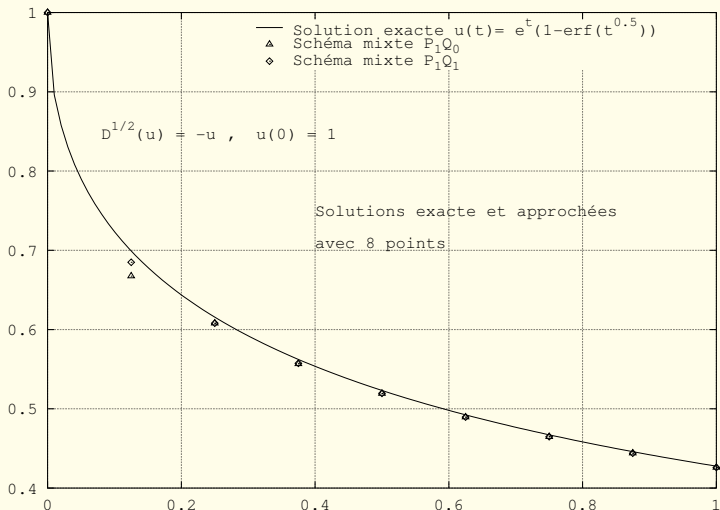
- Comparison with published results :
 previous numerical algorithms proposed by
 Lubich (1986), Blank (1996), Diethelm (1997),
 Diethelm and Ford (1999), Diethelm and Luchko (2000).
- Example of test case proposed by L. Blank (1996) :

$$\begin{cases} D^{1/2}u + u = 0, & t > 0 \\ u = 1, & t \leq 0. \end{cases} \quad (23)$$

- Analytical solution : $u(t) = e^t (1 - \operatorname{erf} \sqrt{t})$.
 A particular case of the Mittag-Leffler exponential :

$$E_{\alpha}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}. \quad (24)$$

Premiers tests numériques (xvii)



Numerical solution of equation (23).

Modèle non linéaire avec une singularité

- Spherical flames semi-differential equation (Joulin [1985]) :

$$\begin{cases} D^{1/2}(u) &= \Phi(u(t), t), & t > 0 \\ u &= 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\Phi(u(t), t) = \log u + \frac{E t^\gamma (1-t)}{u} H(1-t), \quad (26)$$

- where E and $\gamma = 0.3$ are positive constants
and $\theta \mapsto H(\theta)$ is the Heaviside function.
- Note the singularity at $t = 0$!

Modèle non linéaire avec une singularité (ii)

- Delicate computation of the first point u_1^h .
- After elementary algebra, we see that the value u_1^h is solution of the following equation of unknown x :

$$x = 2\sqrt{\frac{h}{\pi}} \left\{ \log x - 1 + \frac{E h^\gamma}{x} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{h}{\gamma+1} \right) \right\}. \quad (27)$$

- Numerical resolution with the Newton algorithm.
- Reference : Audounet and Roquejoffre (1998)
with diffusive representation.

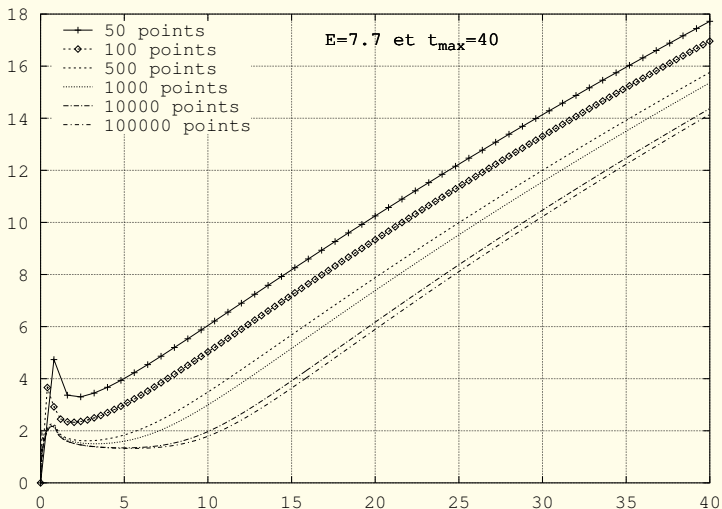
Modèle non linéaire avec une singularité (iii)

- Delicate computation of the general point u_j^h .
Approximation of the flux by the method of trapezes :

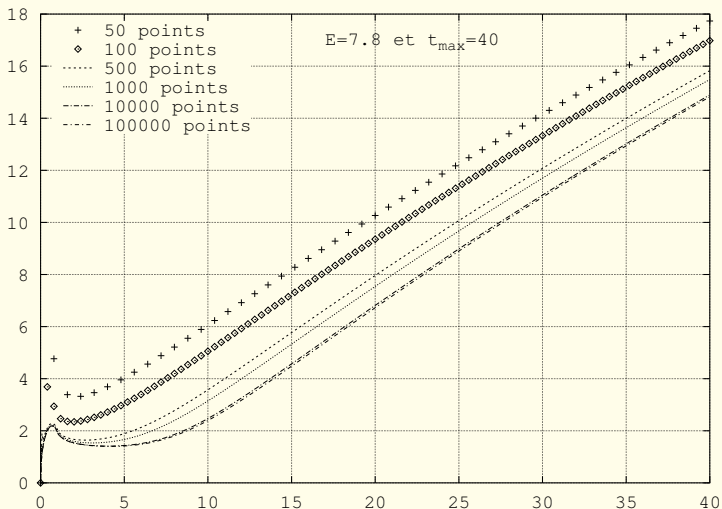
$$u_{j+1}^h - \frac{\sqrt{h}}{\Gamma(3/2)} f_{j+\frac{1}{2}}^h = \frac{\sqrt{h}}{\Gamma(3/2)} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\sqrt{j-k+1} - \sqrt{j-k} \right) f_{k+\frac{1}{2}}^h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{j+\frac{1}{2}}^h \simeq \frac{1}{u_{j+1}^h - u_j^h} \left[u_{j+1}^h \log u_{j+1}^h - u_{j+1}^h \right] - 1 \\ + \frac{E h^{\gamma-1}}{2} \left(\frac{j^{\gamma-1} (1-jh)}{u_j^h} + \frac{(j+1)^{\gamma-1} (1-(j+1)h)}{u_{j+1}^h} \right) \end{array} \right. .$$

Modèle non linéaire avec une singularité (iv)

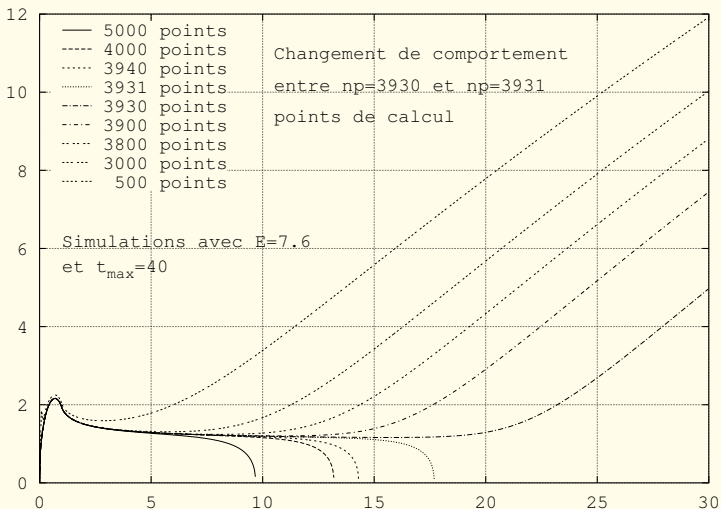


Numerical solution of equation (25)(26) for $E = 7.7$.

Modèle non linéaire avec une singularité (v)

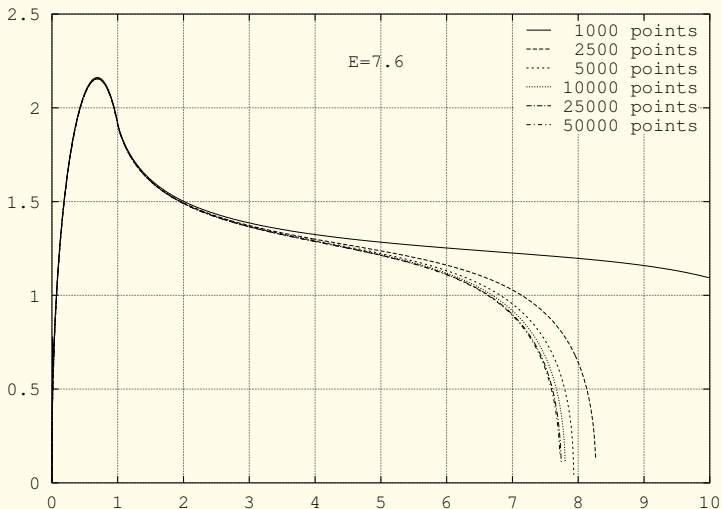
Numerical solution of equation (25)(26) for $E = 7.8$.

Modèle non linéaire avec une singularité (vi)



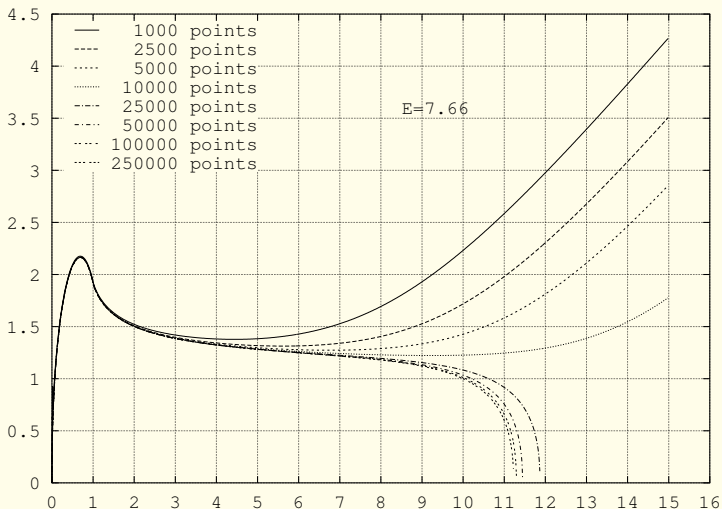
Changing the type of compartment for $E = 7.6$.

Modèle non linéaire avec une singularité (vii)



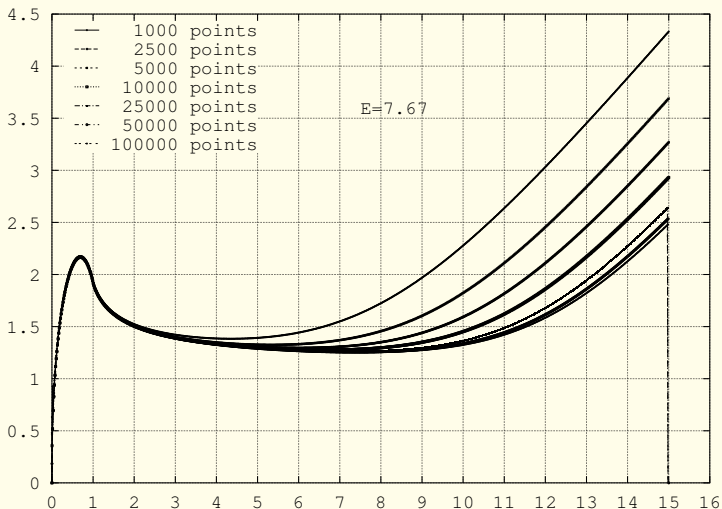
Numerical solution of equation (25)(26) for $E = 7.6$.

Modèle non linéaire avec une singularité (viii)

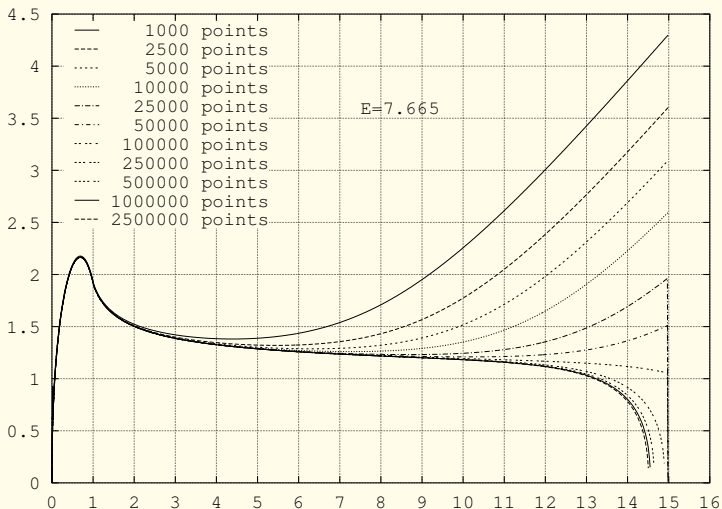


Numerical solution of equation (25)(26) for $E = 7.66$.

Modèle non linéaire avec une singularité (ix)



Numerical solution of equation (25)(26) for $E = 7.67$.

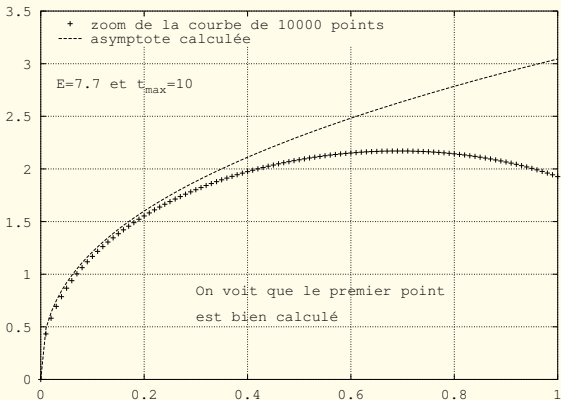
Modèle non linéaire avec une singularité (x)

Numerical solution of equation (25)(26) for $E = 7.665$.

Modèle non linéaire avec une singularité (ξ)

Donc $7.665 < E < 7.67$; $\gamma = 0.3$.

pas tout à fait comme nos auteurs en référence !



Le premier point est calculé de façon précise

Equations aux dérivées partielles

- Problème de thermique
 $y \in [0, +\infty[$
 Diffusivité $\mu > 0$
 Fonction du temps $f(t)$ $t \geq 0$
- On cherche une fonction $u(y, t)$
 solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t), \quad t > 0, \quad y \geq 0. \quad (28)$$

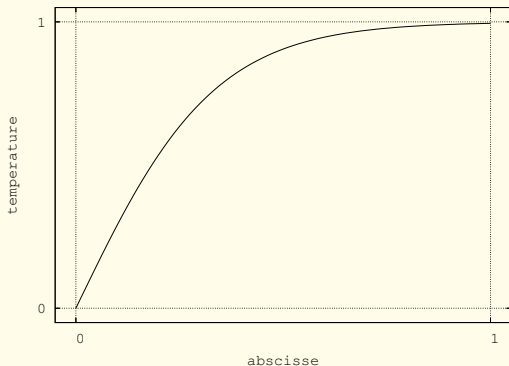
Condition limite en $y = 0$:

$$u(0, t) = 0$$

Condition limite pour y tendant vers $+\infty$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \longrightarrow 0 \quad \text{si } y \longrightarrow +\infty.$$

Equations aux dérivées partielles (ii)



Profil typique de couche limite thermique.

Flux de chaleur $\Phi(t)$ à la paroi donné par la loi de Fourier :

$$\Phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(0, t), \quad t > 0$$

représenté graphiquement par la tangente en $y = 0$
à la courbe de la figure ci-dessus.

Equations aux dérivées partielles (iii)

- Résolution analytique

à l'aide de la transformation de Fourier en temps.

$\widehat{u}(y, \omega)$ de la fonction u :

$$u(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(y, \omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

On dérive par rapport au temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \widehat{u}(y, \omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

ce qui constitue une proposition bien classique : $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = i\omega \widehat{u}$.

On note \widehat{f} la transformée de Fourier du second membre f .

Alors l'équation de la chaleur s'écrit simplement :

$$i\omega \widehat{u} - \mu \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2} = \widehat{f}. \quad (29)$$

Equations aux dérivées partielles (iv)

- Racine carrée complexe :

On note \sqrt{z} la détermination principale de \sqrt{z} .

$$\sqrt{r \exp(i\theta)} \equiv \sqrt{r} \exp\left(i \frac{\theta}{2}\right), \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

On a donc en particulier :

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0, \quad z \notin]-\infty, 0].$$

On peut alors résoudre l'équation (29) :

$$\hat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f} + \alpha \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right).$$

Pas de solution exponentiellement croissante en y

à cause de la condition limite en $+\infty$.

Donc nécessairement $\alpha = 0$.

Equations aux dérivées partielles (v)

- Prise en compte de la condition limite en $y = 0$. On a

$$\hat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f} \left[1 - \exp \left(- \sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y \right) \right].$$

On dérive cette expression par rapport à y :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(y, \omega) = \frac{1}{\sqrt{i\mu\omega}} \hat{f} \exp \left(- \sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y \right)$$

Puis on fait $y = 0$:

$$\hat{\Phi}(\omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}} \hat{f}.$$

La quantité $\sqrt{\frac{1}{i\omega}} \hat{f}(\omega)$ s'interprète comme la transformée de Fourier d'une **intégrale d'ordre un-demi**

Equations aux dérivées partielles (vi)

- Nous posons

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} Y(t),$$

avec $Y(t)$ fonction de Heaviside définie par

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

Nous avons :

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}.$$

- Flux de chaleur :

$$\hat{\Phi} = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \hat{\rho} \hat{f}. \quad (30)$$

Equations aux dérivées partielles (vii)

- Convolution $\rho * f$ des fonctions ρ et f , définie par

$$(\rho * f)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y) f(x - y) dy,$$

Avec la relation classique

$$\widehat{\rho * f} = \widehat{\rho} \widehat{f},$$

on a finalement

$$\widehat{\Phi}(t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \rho * f = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}.$$

- Intégrateur d'ordre un-demi d'une fonction causale

On appelle **intégrateur d'ordre un-demi**

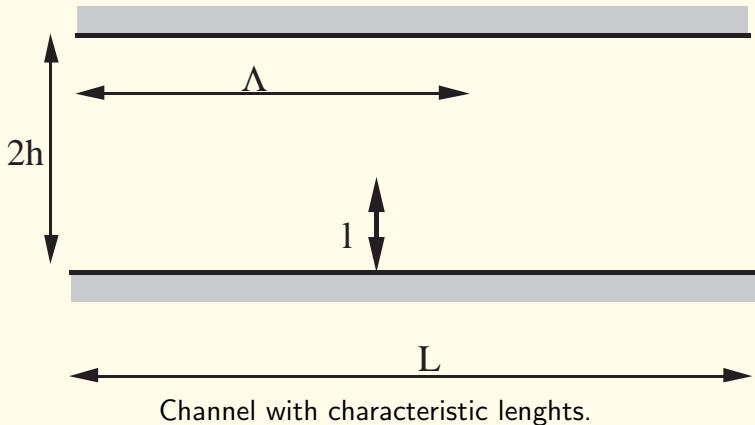
et on note $(I^{1/2}u)(t)$ la fonction causale définie par

$$(I^{1/2}u)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \quad \text{si } t > 0. \quad (31)$$

Thin Layer Navier Stokes equations : hypotheses

- Geometry : the ratio $\frac{h}{L}$ is small : $\frac{h}{L} \ll 1$.
- Length scale $\Lambda =$ wave length λ
- Propagation of longitudinal mode : $\frac{h}{\lambda} < \frac{1}{4}$
- Characteristic length for diffusion : $l = \frac{\mu}{\rho_0 c_0}$
- Acoustic Reynolds number : $R_e^{\text{acou}} = \frac{\rho_0 c_0 \lambda}{\mu}$
- Small parameter $\epsilon \equiv \frac{l}{\Lambda} \approx \frac{1}{R_e^{\text{acou}}} \ll 1$

Thin Layer Navier Stokes equations : notations



Thin Layer Navier Stokes equations : algèbre

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + p u \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + p v \right) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Fluide parfait pour l'écoulement moyen : hypothèses

- Integrate TLNS equations between $y = -h$ and $y = +h$

Introduce mean values :
$$\tilde{\rho}(t, x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \rho(t, x, y) dy$$

$$\tilde{\rho}(t, x) \tilde{u}(t, x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (\rho u)(t, x, y) dy$$

$$\tilde{\rho}(t, x) \tilde{e}(t, x) + \frac{1}{2} \tilde{\rho}(t, x) \tilde{u}^2(t, x) \equiv \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2)(t, x, y) dy$$

- Assume that the boundary layer thickness δ is small :
shear number $S_h \equiv \frac{\delta}{h} \ll 1$
- Quasi-constancy of all the fields in the main flow :
$$\frac{1}{R_e^{\text{acou}}} \frac{1}{S_h} \ll 1.$$

Fluide parfait pour l'écoulement moyen : algèbre

$$\tilde{p} \equiv (\gamma - 1) \tilde{\rho} \tilde{e}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\rho} \tilde{u}) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{p} \right) = \frac{\mu}{2h} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(t, x, h) - \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, -h) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\rho} \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{\rho} \tilde{u}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\rho} \tilde{u} \left(\tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right) + \tilde{p} \tilde{u} \right) &= \\ &= \frac{k}{2h} \left(\frac{\partial T}{\partial y}(t, x, h) - \frac{\partial T}{\partial y}(t, x, -h) \right). \end{aligned}$$

Observe that skin friction and heat flux

are sources for main perfect flow !

Couche limite acoustique

- Linearize the TLNS equations
around the reference state (ρ_0, p_0, θ_0) :

- $$\frac{p'}{\rho_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{\theta_0}$$

- $$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} u' = 0$$

- $$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x}$$

- $$\rho_0 C_p \frac{\partial T'}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} = \frac{\partial p'}{\partial t}.$$

- Boundary conditions at the bottom of the boundary layer :

- $$u'(t, x, y = -h) = 0, \quad T'(t, x, y = -h) = 0.$$

Le problème couplé

- The main flow is described by three unknown functions of density $\rho(t, x)$, velocity $u(t, x)$ and internal energy $e(t, x)$
- Inflow boundary conditions at $x = 0$:

$$u(t, 0) = u_0(t), \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) (t, 0) = 0$$

- Nonreflecting outflow boundary condition at $x = L$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1} \right) + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{2c}{\gamma - 1} \right) \right) (t, L) = 0.$$

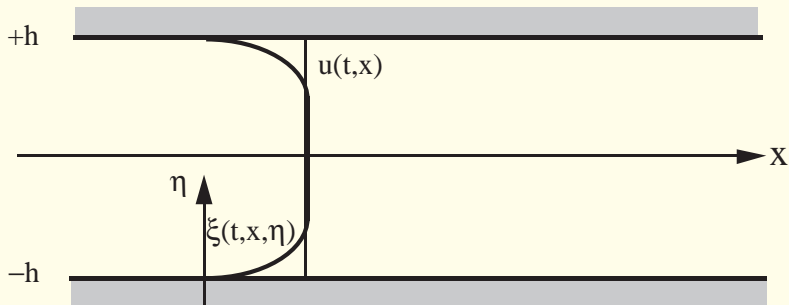
- Transverse variable $\eta > 0$ in the boundary layer
- Velocity $\xi(t, x, \eta)$ and temperature $\theta(t, x, \eta)$
in the boundary layer
- Neumann boundary conditions at the top of the boundary layer :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} (t, x, \eta) \longrightarrow 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} (t, x, \eta) \longrightarrow 0 \text{ when } \eta \longrightarrow +\infty$$

- Dirichlet boundary conditions at the foot of the boundary layer :

$$\xi(t, x, 0) = 0, \quad \theta(t, x, 0) = \theta_0.$$

Le problème couplé : notations



Velocity field $u(x, t)$ in the mean flow
and velocity field $\xi(t, x, \eta)$ inside the boundary layer.

Le problème couplé : equations

- $\rho(t, x) \equiv (\gamma - 1) \rho e$
- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$
- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = -\frac{\mu}{h} \frac{\partial \xi}{\partial \eta}(t, x, 0)$
- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u e + \frac{1}{2} \rho u^3 + p u) = -\frac{k}{h} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(t, x, 0).$
- $\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$
- $\rho_0 C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \frac{\partial p}{\partial t}.$

Solution analytique de l'équation de la chaleur

- Explicit solution of the linear boundary layer equations :

$$\xi(t, x, \eta) = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}(z, x) \operatorname{erf} \left[\frac{\eta}{\sqrt{4 \frac{\mu}{\rho_0} (t-z)}} \right] dz$$

$$\theta(t, x, \eta) = \theta_0 + \frac{1}{\rho_0 C_p} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial t}(z, x) \operatorname{erf} \left[\frac{\eta}{\sqrt{4 \frac{k}{\rho_0 C_p} (t-z)}} \right] dz$$

- Derive the previous relations relatively to the variable η :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta}(t, x, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}(t-z, x) \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 \pi z}} dz$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(t, x, 0) = \frac{1}{k} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-z, x) \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 C_p \pi z}} dz$$

Modèle couplé encore plus simple

- Simplifier encore plus le modèle physique
 Conservation de la masse seulement
 Dynamique fluide de type Burgers et linéarisée
 Equation de la chaleur dans la couche limite
 Deux champs (de vitesse !) inconnus :

$u(x, t)$ dans le fluide parfait

$\xi(x, y, t)$ dans la couche limite

- Equations aux dérivées partielles couplées

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial \xi}{\partial y}(y=0) = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

Modèle couplé encore plus simple (ii)

- On élimine l'équation de la chaleur
à l'aide d'une intégrale d'ordre fractionnaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma (I^{1/2}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (34)$$

- Etude mathématique délicate à cause des effets de mémoire...
- Références récentes : Goubet *et al* avec le modèle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma (I^{1/2}) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

Référence des travaux

- FD et S. Mengué. Schémas numériques implicites pour les équations semi-différentielles, non publié, 2000.
- FD et S. Mengué. Collocation mixte pour les équations différentielles non-linéaires d'ordre fractionnaire, non publié, 2001.
- FD, R. Msallam. Mathematical model for coupling a quasi-unidimensional perfect flow with an acoustic boundary layer with an acoustic boundary layer, non publié, 2002.
- FD et S. Mengué. Mixed Collocation for Fractional Differential Equations, *Numerical Algorithms*, vol. 34, p. 303-311, 2003.
- A. C. Galucio, J.F. Deü et S. Mengué, FD. An adaptation of the Gear scheme for fractional derivatives, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol. 195, pp. 6073-6085, 2006.
- A. C. Galucio, J.F. Deü, FD. The G^α -scheme for Approximation of Fractional Derivatives: Application to the Dynamics of Dissipative Systems, *J. of Vib. and Control*, volume 14, p. 1597-1605, 2008.
- FD, A. C. Galucio et N. Point. Introduction à la dérivation fractionnaire ; théorie et applications. *Tech. de l'Ingénieur*, 2010.